

**VARIETÀ**

- Teo. funzioni implicite
- Teo. funzioni inverse
- Moltiplicatori di Lagrange

**TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE**

Sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  descritti come luogo di zeri di funzioni o sistemi. Caso generale: date  $k$  funzioni  $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  cerco di studiare l'insieme

↑  
o sottoinsieme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n: f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\} \quad (k \leq n)$$

$k$  = codimensione = numero di equazioni

Tre casi: ①  $n=2, k=1$

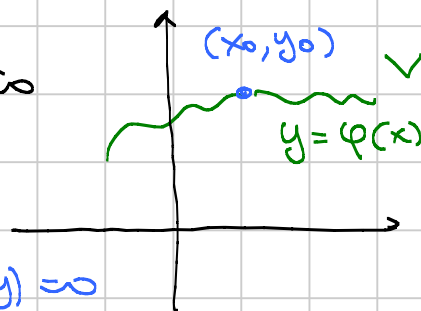
②  $n$  generico,  $k=1$

③  $k < n$  generico

Idea: nel caso ① abbiamo un'equazione  $f(x, y) = 0$ ,  
abbiamo un p.to  $(x_0, y_0)$  t.c.  $f(x_0, y_0) = 0$   
Mi piacerebbe che vicino a  $(x_0, y_0)$   
il luogo  $V$  fosse descritto da un grafico

$$y = \varphi(x)$$

↑  
funzione definita  
implicitamente dall'eq.  $f(x, y) = 0$   
vicino a  $(x_0, y_0)$



Brutalmente: ho ricavato  $y$  dall'equazione  $f(x, y) = 0$   
Ovviamente deve valere

$$f(x, \varphi(x)) = 0. \quad (\text{ci accorgiamo anche se } x = \varphi(y))$$

Teorema (Imp. F.T.  $n=2, k=1$ ) (A Pisa teorema del DINI)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $(x_0, y_0) \in \Omega$  t.c.  $f(x_0, y_0) = 0$ .  
Supponiamo che  $f$  sia continua in  $\Omega$  ← dopo video

$f_y(x, y)$  esiste in  $\Omega$  ed è sempre  $\neq 0$

Allora esiste  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  ed esiste

$$\varphi: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$$

tale che

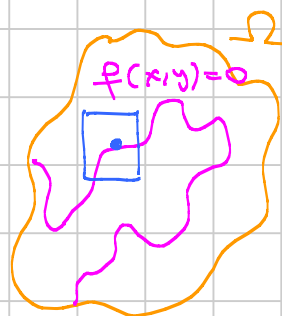
$$\begin{aligned} \{ (x, y) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] : f(x, y) = 0 \} = \\ = \{ (x, \varphi(x)) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \} \end{aligned}$$

Inoltre  $\varphi$  è continua in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ .

Corollario Supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^1$  in  $\Omega$  e  $\nabla f \neq 0$  ovunque.

Allora per ogni punto  $(x_0, y_0) \in V$  esiste un rettangolo in cui  $V$  è del tipo

$$y = \varphi(x) \text{ oppure } x = \varphi(y)$$



Dim. In ogni punto di  $V$  avremo  $f_y(x, y) \neq 0$  (e allora applico il teorema) oppure  $f_x(x, y) \neq 0$  (e allora applico il teo. a variabili invertite).

Teorema Nelle ipotesi del teorema principale, se  $f$  è di classe  $C^k$ , allora anche  $\varphi$  è di classe  $C^k$ .

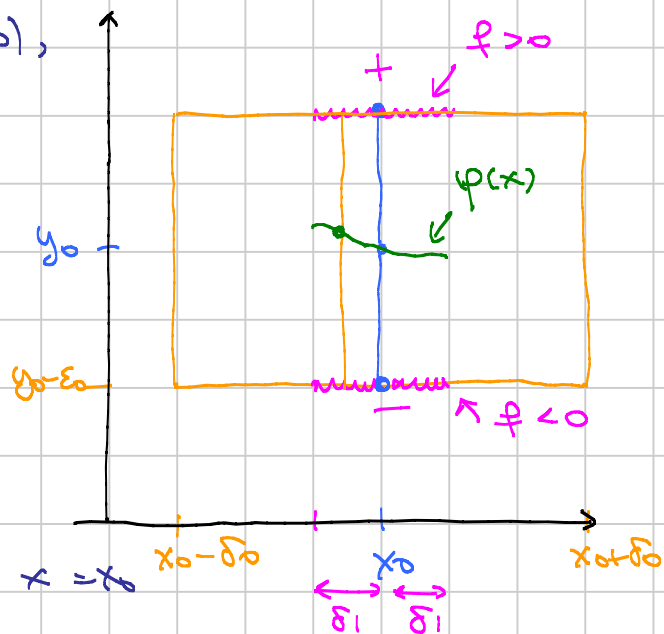
Dim. Impl. F.T. Ipotesi  $f(x_0, y_0) = 0$

$f_y(x, y) \neq 0$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ ,  
diciamo della forma

$$[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

Supponiamo che  $f_y(x, y) > 0$   
nell'intorno (se è  $< 0$  la  
dim. è analoga)

Considerando la restrizione alla retta  $x = x_0$   
otteniamo che



$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0$$

$$f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

Considero le restrizioni alla retta  $y = y_0 - \varepsilon_0$  e  $y = y_0 + \varepsilon_0$ .  
Per continuità

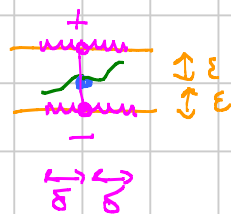
$$\exists \delta_1 > 0 \text{ t.c. } \begin{aligned} f(x, y_0 - \varepsilon_0) &< 0 & \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \\ f(x, y_0 + \varepsilon_0) &> 0 & \end{aligned}$$

Ora considero tutte le rette verticali  $x = \text{cost} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ .  
Su queste rette  $f$  passa da  $-$  a  $+$  ed è monotona strett.  
perché  $f_y > 0 \Rightarrow f$  si annulla un'unica volta in ogni  
segmento verticale.

Questo dimostra che il logo  $V$ , ristretto al rettangolo  
 $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$  è il grafico di  $\varphi$ .

Mi serve la continuità Intanto basta dim la continuità di  $\varphi$   
in  $x_0$ .

1° modo  $(\varepsilon - \delta)$  Fisso  $\varepsilon$  in verticale e ripeto la  
dim. nel rettangolino più basso



2° modo Per successioni con lemma della sotto-sotto.

Sia  $x_n \rightarrow x_0$ . Voglio dim. che  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0) = y_0$

A meno di sotto succ.  $\varphi(x_n) \rightarrow y_\infty$  (non rinuncio).

Se dimostro che  $y_\infty = y_0$  per forza, allora ho finito.

D'altra parte

$$0 = f(x_n, \varphi(x_n)) \xrightarrow{\text{cont. di } f} f(x_0, y_\infty)$$

$\uparrow$  l'unico p.to sopra  $x_0$  che annulla  $f$  è  $y_0$ .

Oss. Nel primo modo usiamo solo la continuità di  $f(x, y)$  sulle rette // agli assi.

Regolarità Supponiamo che  $f(x, y)$  sia  $C^1$  in  $\Omega$ . Voglio dim. che  $\varphi$  è  $C^1$  e vale la formula

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

Non dimostrazione:  $0 = f(x, \varphi(x))$  e derivo

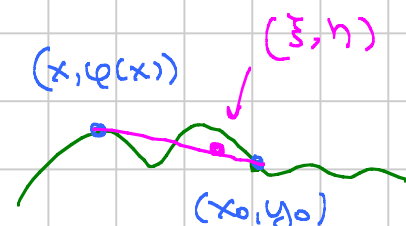
$$0 = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \leadsto \text{ricavo } \varphi'(x)$$

$\uparrow$  chain rule

Dim  $0 = f(x, \varphi(x)) = \overset{0}{f(x_0, y_0)} + (x - x_0) f_x(\xi, \eta) + (\varphi(x) - y_0) f_y(\xi, \eta)$

Ricavo:

$$\frac{\varphi(x) - y_0}{x - x_0} = - \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}$$
$$\varphi'(x_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$



Si arriva a  $C^k$  per BOOTSTRAP