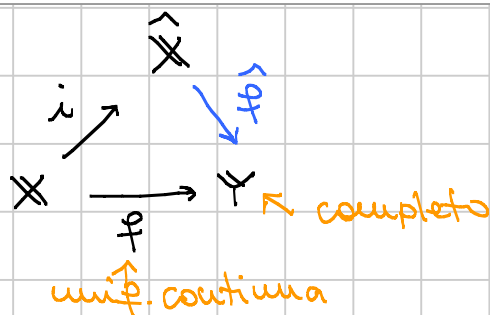


Teorema di estensione

"Stessa dimostrazione di analisi 1" (dato $A \subseteq \mathbb{R}$ il suo completamento è $\text{Clos}(A)$)

Lemma Sia $f: X \rightarrow Y$ unif. cont.

Allora f manda succ. di Cauchy in X in succ. di Cauchy in Y

Dim. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ di Cauchy rispetto a d_X
 Dico che $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ è di Cauchy rispetto a d_Y .

Dato $\varepsilon > 0$, prendo $\delta > 0$ come nella unif. cont.

Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ in modo tale che $d_X(x_n, x_m) \leq \delta$ per ogni $n \geq m_0, m \geq m_0$ e ottengo che

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0$$

Dim. estensione Devo definire $\hat{f}(\hat{x})$ per ogni $\hat{x} \in \hat{X}$.
 So che $i(X)$ è densa in $\hat{X}$, quindi esiste

$$i(X) \ni \hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}$$

In particolare $\hat{x}_n = i(x_n)$ con $x_n \in X$.

La succ. $\hat{x}_n$ è di Cauchy in $\hat{X}$ (converge), quindi x_n è di Cauchy in X (i è isometria), quindi $f(x_n)$ è di Cauchy in Y (f è unif. cont.), quindi $f(x_n) \rightarrow y \in Y$

(perché $\mathcal{Y}$ è completo). Pongo allora $\hat{f}(\hat{x}) = y$.

Resta solo da verificare che la definizione è ben posta, cioè se prendo un'altra succ.

$$i(\hat{x}) \ni \hat{z}_n \longrightarrow \hat{x}$$

"
 $i(z_n)$

allora $f(z_n) \rightarrow y$ (stesso di prima). Infatti supponiamo

$$f(z_n) \rightarrow y_1$$

Allora

$$d_Y(y, y_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_Y(f(z_n), f(x_n)) = 0$$

devo dim.

Basta verificare che $d_Y(f(z_n), f(x_n)) \leq \varepsilon$ per n grande. Ma questo vale quando

$d_X(z_n, x_n) \leq \delta$ per unif. cont., e questo vale quando $d_{\hat{X}}(\hat{z}_n, \hat{x}_n) \leq \delta$ per isometria e questo per n grande è vero perché

$$\begin{array}{l} \hat{x}_n \rightarrow \hat{x} \\ \hat{z}_n \rightarrow \hat{x} \end{array}$$

La dimostrazione che $\hat{f}$ è unif. cont. è la stessa di analisi 1.

— o — o —

Teorema di esistenza del completamento Dato (X, d)

Devo costruire $\hat{X}, \hat{d}, i: X \rightarrow \hat{X}$ isometria con immagine densa

Step 1 Costruisco $\hat{X}, \hat{d}$.

$$\hat{X} = \{ \text{successioni di Cauchy in } X \}$$

Dato due succ. di Cauchy $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, definisco

$$\hat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

Cosa dovrei verificare

① $\hat{X} \neq \emptyset$ se $X \neq \emptyset$ (le succ. costanti vanno bene)

② $\hat{d}$ è ben definita (mi serve che la succ. $d(x_n, y_n)$ sia di Cauchy come succ. di reali)

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, x_m)| + |d(x_n, x_m) - d(y_m, x_m)|$$

... non mi viene ...

$$\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)|$$

Aggiunto dopo video

$$\leq d(y_m, y_n) \leq \varepsilon \quad \leq d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

③ $\hat{d}$ è quasi una distanza, cioè verifica tutte le proprietà tranne la (d2), cioè può essere 0 anche se le succ. sono diverse.

Step 2 Definizione di $\hat{X}, \hat{d}, i$

Introduco una relazione di equiv. in $\hat{X}$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{se} \quad d(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

Ci sarebbero un po' di cose da verificare

① $\sim$ è una relaz. di equiv. (semplice)

Posso definire

$$\hat{X} := \hat{\hat{X}} / \sim \quad (\text{spazio quoziente})$$

② $\hat{d}$ passa al quoziente, cioè

$$\left. \begin{array}{l} \{x_n\} \sim \{x'_n\} \\ \{y_n\} \sim \{y'_n\} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \hat{d}(\{x'_n\}, \{y'_n\})$$

Fatto questo, abbiamo definito $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$

③ $\hat{d}$ è una distanza vera in $\hat{X}$ (il quoziente mi regala la (d_2))

④ Definisco $i : X \rightarrow \hat{X}$ identificando ogni $x \in X$ con la classe di equivalenza della succ. $x_n \equiv x$

⑤ i è una isometria (ora è banale)

⑥ $i(X)$ è denso in $\hat{X}$, rispetto alla distanza $\hat{d}$.

(Si tratta solo di capire cosa fare e trovare una notazione per farlo...)

Dato $\hat{x} \in \hat{X}$, dato $\varepsilon > 0$, voglio $y \in X$ tale che

$$\hat{d}(\hat{x}, i(y)) \leq \varepsilon$$

Ora $\hat{x} = [\{x_n\}]_{\sim}$ e l' y che cerco sarà x_n con n abbastanza grande.

Step 3 Resta da far vedere che $(\hat{X}, \hat{d})$ è completo.

Sia $\{\hat{x}_n\}$ una succ. di Cauchy in $\hat{X}$ rispetto a $\hat{d}$.
Voglio individuare $\hat{x}_\infty \in \hat{X}$ tale che

$$\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}_\infty \quad \text{in } \hat{X}.$$

Come definisco $\hat{x}_\infty$? Uso la densità verificata prima.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in X$ tale che

$$\hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) \leq \frac{1}{n}$$

↑ posso mettere un qualunque $\varepsilon > 0$

Si tratta ora di verificare che



① $\{y_n\}$ è succ. di Cauchy in X

$$d(y_n, y_m) = \hat{d}(i(y_n), i(y_m))$$

$$\begin{aligned} &= \hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, i(y_m)) \\ &\leq \frac{1}{n} \quad \leq \varepsilon \quad \leq \frac{1}{m} \end{aligned}$$

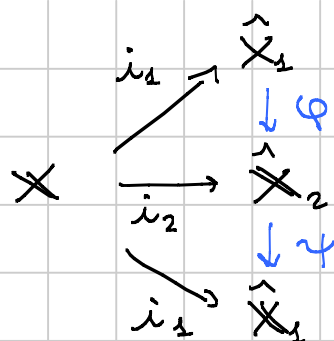
Posso definire $\hat{x}_\infty = [\{y_n\}]_\sim$

② $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}_\infty$ in $\hat{X}$. Questo segue dal fatto che

$i(y_n) \longrightarrow \hat{x}_\infty$ (questa avrebbe verificata)

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_\infty) \leq \underbrace{\hat{d}(\hat{x}_n, i(y_n))}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\hat{d}(i(y_n), \hat{x}_\infty)}_{\text{piccola per } n \text{ grande}}$$

Unicità



φ si costruisce con il teorema di estensione

ψ si costruisce con il teorema di estensione

- Dovrei verificare:
- ① $\psi \circ \varphi$ è l'identità (lo è su un denso)
 - ② il diagramma si chiude per costruzione
 - ③ φ è isometria (lo è su un denso).

— o — o —