

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico.

Si dice **CONTRAZIONE** una qualunque funzione $\varphi: X \rightarrow X$ che è Lip. con costante di Lip. < 1 , cioè tale che esiste $L < 1$ t.c.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2$$

TEOREMA (Delle contrazioni - Teo. di p.to fisso di Banach)

Sia (X, d) metrico **COMPLETO**, e sia $\varphi: X \rightarrow X$ contrazione.

Allora φ ammette un unico **p.to fisso**, cioè esiste un unico $x \in X$ tale che

$$\varphi(x) = x.$$

Dim. **Unicità** Supponiamo che ci siano due p.ti fissi

$$\varphi(x) = x \quad \varphi(y) = y$$

Allora

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d(x, y)$$

$\uparrow$ x, y fissi $\uparrow$ contras.

$$\underbrace{(1-L)}_{>0} d(x, y) \leq 0$$

$\downarrow$ per forza $= 0$.

Nota: non ho usato la completezza.

Esistenza Idea euristica: prendo $x_0 \in X$ a caso. Poi costruisco la succ per ricorrenza $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Facciamo finita che $x_n \rightarrow x_\infty$

$$\begin{array}{ccc}
 x_{n+1} & = & \varphi(x_n) \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \curvearrowright \quad \varphi \text{ è cont. essendo Lip} \\
 x_\infty & = & \varphi(x_\infty)
 \end{array}$$

Quindi, SE la succ. $\{x_n\}$ converge, allora il suo limite è il pto fisso cercato.

Per dim. la convergenza, basta far vedere che è di Cauchy.

Stima preliminare: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$$d(x_2, x_1) = d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \leq L d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) \leq L^2 d(x_1, x_0)$$

$\vdots$

induzione $d(x_{k+1}, x_k) \leq L^k d(x_1, x_0)$

Prendiamo 2 indici $m \geq n$. Allora

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq L^{m-1} d(x_1, x_0) + \dots + L^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (L^{m-1} + \dots + L^n) d(x_1, x_0) \\ &\leq L^n (1 + L + L^2 + \dots) \quad \leftarrow \text{metto gli } \infty \text{ termini della geometria} \\ &\leq L^n \frac{1}{1-L} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Questo dimostra che x_n è di Cauchy: infatti per ogni $\varepsilon > 0$ scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$L^{m_0} \frac{1}{1-L} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon \quad (\text{posso perché } L < 1)$$

e sono sicuro che $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ per ogni $m \geq m_0, n \geq m_0$.

— o — o —

Idea: quando ho una contrazione, posso partire da un pto qualunque e iterando convergo all'unico pto fisso.
Tra l'altro

$$d(x_{n+1}, x_\infty) \leq L d(x_n, x_\infty)$$

$$d(x_n, x_\infty) \leq L^n d(x_0, x_\infty)$$

Interpretazione geografica: se metto una mappa d'Italia sul tavolo, allora c'è un unico pto della mappa che rappresenta se stesso.

Controesempi

① Serve la completezza: $X = (0,1)$ con la d classica
 $\varphi(x) = \frac{x}{28}$ *contrae con $L = \frac{1}{28}$*
e non ha pti fissi.

② Non basta $L=1$: $X = \mathbb{R}$ $\varphi(x) = x + 28$

③ Non basta $L=1$ nemmeno se X è compatto

$$X = S^1, \quad \varphi = \text{rotazione di } 28^\circ$$

④ Non basta la "contrazione debole":

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x, y) \quad \forall x \neq y$$

(Basta per l'unicità, ma non per l'esistenza)

$$X = \mathbb{R} \quad \varphi(x) = x - \arctan x + 28$$

Si verifica che $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi φ è contrazione debole.

Ma φ non ha pti fissi.

⑤ (Hard, ma non troppo) X compatto
 φ contrazione debole
 $\Rightarrow$ esiste pto fisso

Oss. $\text{cpt.} + \text{contra debole} \not\Rightarrow \text{contrazione vera}$
— o — o —

COMPLETAMENTO DI UNO SPAZIO METRICO

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico.

Si dice **COMPLETAMENTO** di (X, d) una terna $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ dove

(i) $(\hat{X}, \hat{d})$ è uno spazio metrico completo

(ii) $i: X \rightarrow \hat{X}$ è una isometria, cioè

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X$$

(iii) $i(X)$ è denso in $\hat{X}$.

Esempio $X = (0, 1)$ $\hat{X} = [0, 1]$ (se non ci fosse la (iii) avrebbe bene $\hat{X} = \mathbb{R}$)

Teorema 1 Ogni sp. metrico (X, d) ammette un completamento.

Teorema 2 (Teorema di estensione)

Sia (X, d) un metrico, e sia $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ un suo completamento. Sia (Y, d_Y) uno spazio metrico **COMPLETO**, e sia

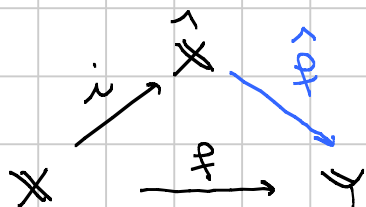
$$f: X \rightarrow Y$$

una funzione unif. continua.

Allora esiste un' unica estensione $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$ unif. cont. tale che

$$\hat{f}(i(x)) = f(x) \quad \forall x \in X$$

e cioè che chiude il diagramma



Teorema 3 (Unicità del completamento)

Sia (X, d) un metrico, e siano $(\hat{X}_1, \hat{d}_1, i_1)$ e $(\hat{X}_2, \hat{d}_2, i_2)$ due completamenti.

Allora esiste

$$\varphi: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$$

tale che

(i) φ è bigettiva

(ii) φ è isometria, cioè $d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$

per ogni $(x, y) \in \hat{X}_1^2$

(iii) φ commuta con le immersioni, cioè

$$i_2(x) = \varphi(i_1(x)) \quad \forall x \in X,$$

cioè chiude i diagrammi

