

Cont. teo. caratt. compattezza : resta da fare $\boxed{(ii) + (iii) \Rightarrow (i)}$

Lemma (Lemma del raggio magico) (Lemma del numero di Lebesgue)

Sia (X, d) uno sp. metrico compatto per successioni.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

Allora esiste $r > 0$ con questa proprietà
 $\uparrow$
 numero di L. del ricopr.

$$\forall x \in X \quad \exists i \in I \quad \text{t.c.} \quad B_r(x) \subseteq U_i.$$

Dim. Supponiamo per assurdo che non sia vero, quindi

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \quad \text{t.c.} \quad B_r(x) \text{ non è contenuta in nessun } U_i$$

Uso questa con $r = \frac{1}{n}$ e ottengo x_n t.c. $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ non è contenuta in nessun U_i .

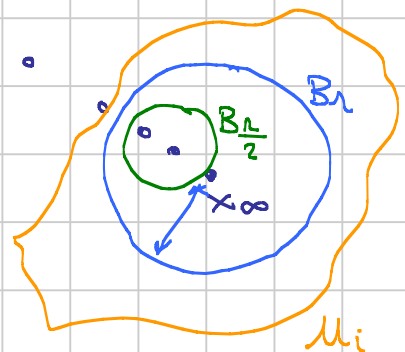
Per ipotesi esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Sia $i \in I$ tale che

$$x_\infty \in U_i$$

Essendo U_i aperto, esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x_\infty) \subseteq U_i$$



Scelgo k abbastanza grande in maniera tale che

$$x_{n_k} \in B_{\frac{r}{2}}(x_\infty) \quad \frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$$

(entrambe sono vere definitivamente)

Questo garantisce che

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_r(x_\infty) \subseteq M_i$$

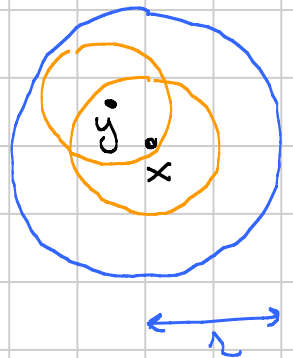
e questo contraddice la definizione di x_{n_k} (era un pto tale che la palla con centro in lui e raggio $\frac{1}{n_k}$ non era contenuta in nessun M_i).

— o — o —

Ho usato il seguente fatto generale:

dati $x \in X$, $r > 0$, $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, allora

$$B_{\frac{r}{2}}(y) \subseteq B_r(x)$$



$$\begin{aligned} z \in B_{\frac{r}{2}}(y) &\Rightarrow d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in B_r(x)$$

— o — o —

Concludiamo che (i) + (ii) $\Rightarrow$ (i)

Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ un ricopr. qualunque. Voglio trovare un s. ricopr. finito.

Sia $r > 0$ il raggio magico del ric. (esiste per lp (ii))
Per la totale limitatezza esiste una r -rete, cioè esistono $y_1, \dots, y_m$ t.c.

$$X = B_r(y_1) \cup \dots \cup B_r(y_m)$$

Per la magicità del raggio esistono $i_1, \dots, i_m$ in I t.c.

$$B_r(y_1) \subseteq M_{i_1}, \dots, B_r(y_m) \subseteq M_{i_m}$$

Ma allora

$$X = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_m} \leftarrow \text{s. ric. finito.}$$

— o — o —

Teorema (Heine-Cantor)

Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due sp. metrici, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) (X, d_x) è compatto.

Allora f è unif. continua.

Dim 1 $\rightarrow$ via compattezza per succ. Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall y \in B_\delta(x) \quad d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Suppongo per assurdo che sia falso, quindi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X \exists y \in B_\delta(x) \quad d_y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ e ottengo x_n e y_n t.c.

$$d_x(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad d_y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Come ad analisi 1

- esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ (perché (X, d_x) è cpt. per succ.)
- per forza $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$

$$0 \leq d_x(y_{n_k}, x_\infty) \leq \underbrace{d_x(y_{n_k}, x_{n_k})}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d_x(x_{n_k}, x_\infty)}_{\rightarrow 0}$$

- poiché f è continua per succ. avremo $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$
 $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$
- e quindi

$$\varepsilon_0 \leq d_y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \rightarrow d_y(f(x_\infty), f(x_\infty)) = 0$$

Assurdo. $\square$

Dim 2 $\rightarrow$ via compatt. per ricopr.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per continuità ε - δ avremo che

$$\forall x \in X \quad \exists \delta(x) > 0 \quad \forall y \in B_{\delta(x)}(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Ora $\{B_{\delta(x)}(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento di X , dal quale posso estrarre un s. ric. finito.

$$X = B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_m}(x_m)$$

Non ho finito: le cose vanno bene solo se x è il centro e y sta nella stessa palla.
(x e y abbastanza vicini possono finire però in palle diverse)

Via d'uscita: parto con $\frac{\varepsilon}{2}$, ottengo un ricoprimento opportuno, il ricopr. avrà un raggio massimo che chiamo δ e questo va bene per l'unif. continuità. Infatti

siano x e y in X con $d_X(x, y) \leq \delta$. Allora $y \in B_\delta(x)$ che è contenuta in una certa

$$B_{\delta(x_i)}(x_i)$$

Ora

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(y), f(x_i)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

— o — o —

Prop.] (Caratterizzazione della totale limitatezza)

Sia (X, d) metrico.

Allora sono fatti equivalenti.

(i) X è totalmente limitato

(ii) $\forall r > 0 \quad \exists K_r \subseteq X$ totalmente limitato con questa propr.

$$\forall x \in X \quad \exists y \in K_r \quad \text{t.c.} \quad d(x, y) \leq r.$$

(i.e. K_r sono ∞ distributori, ma tot. limitati)

Dim (i) $\Rightarrow$ (ii) è banale adolittura
con K_r finito.



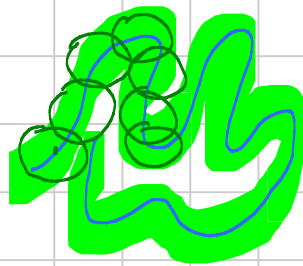
(ii) $\Rightarrow$ (i) Fisso $r > 0$ e voglio trovare # finito di distributori.

Uso la (ii) con $\frac{r}{2}$ e trovo $K_{\frac{r}{2}}$ tale che

l'intorno di $K_{\frac{r}{2}}$ a raggio $\frac{r}{2}$ è tutto X .

Considero $x_1, \dots, x_m$ tale che

$$K_{\frac{r}{2}} \subseteq B_{\frac{r}{2}}(x_1) \cup \dots \cup B_{\frac{r}{2}}(x_m)$$



Dico che $X \subseteq B_r(x_1) \cup \dots \cup B_r(x_m)$

Dato infatti un qualunque $x \in X$ esiste $y \in K_{\frac{r}{2}}$ t.c.

$d(x, y) \leq \frac{r}{2}$. Esiste poi $i \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $d(y, x_i) \leq \frac{r}{2}$

e concludo con la triangolare che $d(x, x_i) \leq r$.



Osservazione finale

- Le funzioni continue mandano compatti in compatti, anche se lo spazio è solo metrico.
Questo si dim. bene sia per succ. sia per ricop.
- Le funzioni continue non mandano completi in completi, né tot. lim. in tot. lim.
Solo insieme si conservano completezza e tot. lim.

(Trovare esempi: esercizio!)

— • — • —