

Notazione: (X, d) spazio metrico.

Dati $x_0 \in X$ e $r > 0$ poniamo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

$$\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

Esercizio È possibile che una palla sia contenuta strettamente in una palla di raggio inferiore?

TEOREMA (Caratterizz. della compattezza in sp. metrici)

Sia (X, d) metrico.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) (X, d) è compatto per ricoprimenti,

(ii) " " " " successioni,

(iii) (X, d) è completo + totalmente limitato.

Schema della dimostrazione:

→ (i) $\Rightarrow$ (ii)

→ (ii) $\Rightarrow$ completezza

→ (ii) $\Rightarrow$ tot. lim.

→ (iii) $\Rightarrow$ (ii)

→ (iii) + (ii) $\Rightarrow$ (i)

M

F

M

MD

D

(i) $\Rightarrow$ (ii) Hp: cpt. per ricopr. Tesi: comp. per succ.

Lemma Sia (X, d) cpt. per ricopr. e sia $\{x_n\} \subseteq X$ una succ.

Allora $\exists x_\infty \in X$ con questa proprietà

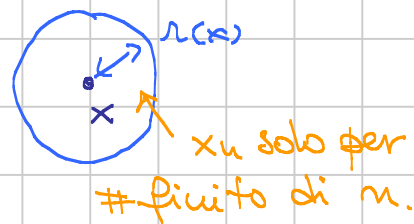
$\forall r > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_r(x_\infty)\}$ è infinito



Dim. Supponiamo che sia falso. Allora

$\forall x \in X \exists r(x) > 0$ t.c. $B_{r(x)}(x)$ contiene termini della succ. solo per un numero finito di indici

Ora $\{B_{r(x)}(x) : x \in X\}$ sono un ricoprimento aperto di X . Quindi esiste un s.ric. finito



$$X = B_{r_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_k}(x_k)$$

In ognuna di queste cascano gli x_n solo per un numero finito di indici $n \in \mathbb{N}$. Assurdo.

Nota: i termini della succ. possono essere un numero finito (ad es. la succ. costante), ma gli indici sono comunque infiniti. $\square$

Dato il lemma si chiude trovando una s.succ. $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$.

Definisco

• m_1 t.c. $x_{m_1} \in B_1(x_\infty)$

⋮

• m_{k+1} t.c. $\underbrace{n_{k+1} > m_k}_{\text{indice} > \text{preced.}}$ e $\underbrace{x_{m_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x_\infty)}_{\text{posso perché la } B \text{ contiene } x_n \text{ per } \infty \text{ valori di } n.}$

Questo garantisce che $d(x_{m_k}, x_\infty) \leq \frac{1}{k}$, quindi $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ completezza

Sia $\{x_n\}$ una succ. di Cauchy. Per H_p ammette una sottosucc. conv. Ora uso

Fatto generale: se una succ. di Cauchy ammette una s.succ. convergente, allora TUTTA QUANTA converge (stessa dim di analisi 1: esercizio)

(cc) $\Rightarrow$ totale limitatezza

Per assurdo supponiamo (X, d) NON TOT. LIM. e troviamo una succ. x_n che non ammette s. succ. convergenti.

(X, d) non tot. lim. vuol dire

$\exists r_0 > 0$ tale che comunque prendo un numero finito di palle di raggio r_0 , queste non ricoprono tutto X .

Costruisco x_n per induzione così:

- scelgo x_1 a caso
- dati $x_1, \dots, x_k$ considero

$$x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{r_0}(x_i)$$

$\uparrow$
esiste per l'ipotesi di assurdo



Allora per costruzione $d(x_n, x_m) \geq r_0$ per ogni $m \neq n$.

Questo impedisce alla succ. $\{x_n\}$ di avere una s. succ. conv. (una sotto succ. conv. dovrebbe essere di Cauchy, ma non può perché la dist. fra 2 termini diversi è sempre $\geq r_0$).

(cii) $\Rightarrow$ (ii)

Lemma (Procedimento diagonale) Consideriamo

$$\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

una succ. di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, tutti INFINITI e ognuno contenuto nel precedente. Allora esiste una succ. n_k strett. cresc. tale che $n_k \in N_k$.

Dim. Costruisco m_k induttivamente:

- prendo $m_0 \in N_0$ a caso
- scelti $m_1, \dots, m_k$, voglio scegliere $m_{k+1} \in N_{k+1}$ con $m_{k+1} > m_k$ e ho infinite scelte possibili.

Oss. In realtà $m_k \in N_i$ per ogni $i \leq k$.

Volevamo: fissato i , abbiamo che

$m_k \in N_i$ definitivamente (per ogni $k \geq i$)

Lemma Sia (X, d) totalmente limitato e sia $\{x_n\}$ una successione.

Allora $\{x_n\}$ ammette una s. succ. di Cauchy.

Dim. Voglio usare il procedimento diagonale. Definisco gli N_k induttivamente.

- $N_0 = \mathbb{N}$
- N_1 lo def. così: fisso $\epsilon = 1$, ottengo una 1-rete

$$X = B_1(y_1) \cup \dots \cup B_1(y_m)$$

Almeno una delle $B_1(y_i)$ contiene termini della succ. per ∞ indici. Questi indici sono m_1 .

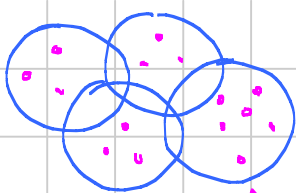
- ...
- Definiti $N_1, \dots, N_k$ definisco N_{k+1} così: fisso $\epsilon = \frac{1}{k+1}$ e prendo una $\frac{1}{k+1}$ -rete

$$X = B_{\frac{1}{k+1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\frac{1}{k+1}}(y_m)$$

m e gli y_i sono diversi da prima

Almeno una di queste contiene termini della succ. per infiniti indici di N_k : questi sono N_{k+1}

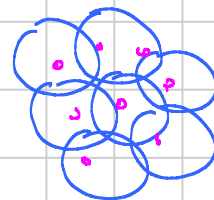
$$r=1$$



qui
infiniti
↓
 N_1

Butto quelli
che non sono
in N_1

$$r=\frac{1}{2}$$



Concludo con il procedimento diagonale: prendo n_k crescente
strett. tale che $n_k \in N_k$.

Dico che $\{x_{n_k}\}$ è di Cauchy

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo k_0 t.c. $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$.

Allora definitivamente

$n_k \in N_{k_0}$ (questo accade $\forall k \geq k_0$).

Ma allora per ogni $i \geq k_0, j \geq k_0$ si avrà

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq 2 \frac{1}{k_0} < \varepsilon$$



perché x_{n_i} e x_{n_j} è in una stessa palla
di raggio $\frac{1}{k_0}$.



Conclusione di (iii) $\Rightarrow$ (ii)

Grazie alla totale l.i.u. ottengo una s.succ. di Cauchy e
grazie alla completezza questa converge.