

Seconda parte di Analisi 2

|                                                                                                                            | Teoria | Esercizi |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|
| ① Spazi metrici                                                                                                            | 80%    | 20%      |
| ② Varietà : $\rightarrow$ teo. funzione implicita<br>$\rightarrow$ " " inversa<br>$\rightarrow$ moltiplicatori di Lagrange | 40%    | 30%      |
| ③ Successioni e serie di Funzioni                                                                                          | 30%    | 40%      |
| ④ Equazioni differenziali<br>— o — o —                                                                                     | 30%    | 70%      |

### SPAZI METRICI - BANACH - HILBERT

- $X \rightarrow$  insieme  
 $\rightarrow$  nozione di convergenza ("lista delle succ. convergenti")  
 $\rightarrow$  spazio topologico  
 $\rightarrow$  spazio metrico  
 $\rightarrow$  spazio di Banach  
 $\rightarrow$  " " Hilbert  
 $\rightarrow \mathbb{R}^n$
- ] spazi vettoriali

**DISTANZA** Sia  $X$  un insieme. Una distanza su  $X$  è una funzione  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- (d1)  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x$  e  $y$  in  $X$   
 (d2)  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$   
 (d3)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x$  e  $y$  in  $X$  (simmetria)  
 (d4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z$  (disug. triang.)

Def. Uno spazio metrico è una coppia  $(X, d)$  dove

- $X$  è un insieme
- $d$  è una distanza su  $X$ .

Achtung! Nel verificare che  $d$  è una distanza, occorre controllare anche

(do)  $d$  è definita su tutto  $X \times X$ .

Esempi

① "Distanza discreta":  $X$  insieme qualunque

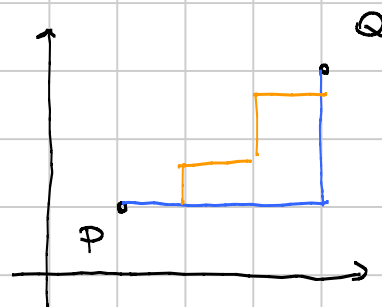
$$d(x, y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

②  $\mathbb{R}^n$  con la distanza Euclidea  $x = (x_1, \dots, x_n)$   
 $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d(x, y) := \left\{ \sum (y_i - x_i)^2 \right\}^{1/2}$$

③  $\mathbb{R}^n$  con la distanza "taxi driver"

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$$



④  $\mathbb{R}^n$  con la distanza del max:

$$d(x, y) := \max \{ |y_i - x_i| : i = 1, \dots, n \}$$

⑤  $\mathbb{R}^n$  con la "distanza  $p$ -esima" ( $p \geq 1$ )

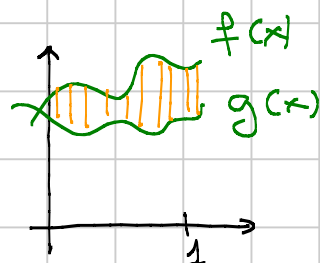
$$d_p(x, y) := \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right\}^{1/p}$$

$p=1 \rightsquigarrow$  taxi driver  
 $p=2 \rightsquigarrow$  Euclidea  
 $p=+\infty \rightsquigarrow$  max

(la triangolare non è ovvia)

⑥  $X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate}\}$

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0, 1] \}$$



**NORMA** Sia  $V$  uno sp. vett. reale. Una norma su  $V$  è una funzione  $n: V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$(n_0) \quad n(v) \geq 0 \text{ per ogni } v \in V$$

$$(n_1) \quad n(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(n_2) \quad n(\lambda v) = |\lambda| \cdot n(v) \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e per ogni } v \in V$$

$$(n_3) \quad n(v+w) \leq n(v) + n(w) \text{ per ogni } v \text{ e } w \text{ in } V$$

Notazione:  $n(v) = \|v\|$

Fatto decisivo Se  $\|v\|$  è una norma, allora

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

è una distanza su  $V$

**PRODOTTO SCALARE** ... funzione  $\langle v, w \rangle$  ...

- bilineare
- simmetrico
- definito positivo (cioè  $\langle v, v \rangle > 0$  per ogni  $v \in V$ )

Fatto decisivo Dato un prodotto scalare in  $V$

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

è una norma su  $V$ .

— o — o —

Dalla metrica segue una nozione di convergenza:

se  $(X, d)$  è sp. metrico e  $\{x_n\} \subseteq X$  e  $x_\infty \in X$ , allora

$$\underbrace{x_n \rightarrow x_\infty}_{\substack{\uparrow \\ \text{limite in } X}}$$

se

$$\underbrace{d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0}_{\substack{\uparrow \\ \text{limite in } \mathbb{R}}}$$

Dalla metrica segue tutto il linguaggio topologico

→ p.to interno, parte interna, aperto

→ " aderente, chiusura, chiuso

→ frontiera

→ p.ti isolati

→ p.ti di accumulazione, insieme derivato.

Def. Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice **COMPLETO** se tutte le successioni di Cauchy a valori in  $X$  convergono.  
Una succ.  $\{x_n\} \subseteq X$  si dice di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m \geq n_0 \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Def. Spazio di Banach = sp. vett. con norma che lo rende completo

Spazio di Hilbert = stessa cosa con in più la norma che deriva da un prodotto scalare.

Lemma In uno sp. metrico  $(X, d)$  le succ. conv. sono di Cauchy

Dim. Dato  $\varepsilon > 0$ , per def. di lim. so che esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.

$$d(x_n, x_\infty) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Dico che  $n_0$  va bene nella def. di succ. di Cauchy.  
Infatti per ogni  $n \geq n_0$  e  $m \geq n_0$  si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_\infty, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lipschitzianità e Hölderianità sono proprietà metriche

Def. Siano  $(X, d)$  e  $(Y, \delta)$  due spazi metrici.

Una  $f: X \rightarrow Y$  si dice  $\alpha$ -Hölderiana con costante  $H$  se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq H [d(x, y)]^\alpha \quad \forall (x, y) \in X^2$$

Def. La stessa  $f$  si dice unif. continua se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad \forall (x, y) \in X^2 \text{ con } d(x, y) \leq \delta$$

Esercizio Il prodotto di due funzioni  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: X \rightarrow \mathbb{R}$$

uniformemente continue e limitate è ancora u.c.