

BACK TO INVERSIONE ROTORE

Dato campo $\vec{E}$, trovare $\vec{F}$ tale che $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$

① Cond. nec. è che $\text{div } \vec{E} = 0$. Se non succede, non è possibile.

② Se $\text{div } \vec{E} = 0$ e siamo su un parallelepipedo, allora è possibile trovare $\vec{F}$

Dim $\vec{E} = (A, B, C)$ $\vec{F} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ e voglio che

$$\text{rot } \vec{F} = (\hat{C}_y - \hat{B}_z, -\hat{C}_x + \hat{A}_z, \hat{B}_x - \hat{A}_y)$$

Prima semplificazione: scelgo $\hat{C} \equiv 0$ e mi riduco a risolvere

$$\begin{array}{ll} -\hat{B}_z = A & \leadsto \text{Pongo } \hat{B} = -\overset{\bar{A}}{\text{primitiva di } A \text{ in } z} + \psi(x, y) \\ \hat{A}_z = B & \leadsto \text{Pongo } \hat{A} = \underset{\bar{B}}{\text{primitiva di } B \text{ in } z} + \psi(x, y) \\ \hat{B}_x - \hat{A}_y = C & \end{array}$$

Seconda semplificazione: scelgo $\psi(x, y) \equiv 0$. Sostituisco nella terza equazione e ritratto

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C \leadsto -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \psi_y = C \leadsto$$

$$\leadsto \psi_y = \bar{A}_x + \bar{B}_y + C$$

↑
deve essere
funzione di solo
x e y

↓
Non dipende da z

$$(\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z = \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z = \underbrace{\bar{A}_{xz}}_0 + \underbrace{\bar{B}_{yz}}_0 + \underbrace{C_z}_0 = \text{div } \vec{E} = 0.$$

Domanda: dove ho usato che siamo in un parallelepipedo?

③ Se non siamo in un parallelepipedo, la condizione $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ NON implica in generale che $\vec{E}$ è un rotore.

Esempio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{origine}$

$$\vec{E} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = (A, B, C)$$

$$\begin{aligned} A_x &= \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]_x = \frac{1}{(\dots)^{3/2}} - x \cdot \frac{3}{2} \frac{2x}{(\dots)^{5/2}} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(\dots)^{5/2}} \end{aligned}$$

Facendo l'analogo per B_y e C_z scopro che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

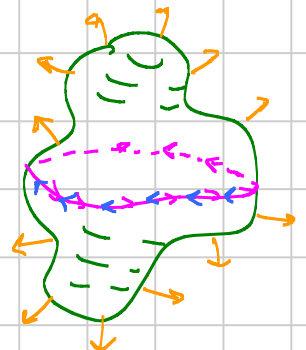
Fatto generale Il flusso di un rotore attraverso una sup. chiusa (non topologicamente, ma senza bordo) è sempre uguale a zero.

Dim. un po' brutale $\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \dots$

se $\partial S = \emptyset$ viene 0.

In alternativa, si può pensare la sup. chiusa come unione di 2 sup. con bordo.

Facendo i 2 Stokes i termini di bordo si elidono.



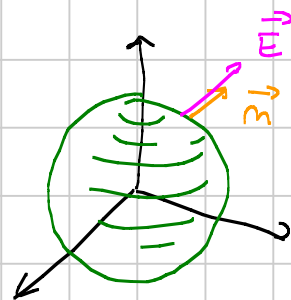
Criterio Per dimostrare che $\vec{E}$ non è un rotore basta trovare una sup. chiusa sulla quale abbia flusso $\neq 0$.

Per il campo $\vec{E}$ dato precedentemente basta prendere una sfera centrata nell'origine ed il flusso diventa positivo

Oss. Il campo $\vec{E}$ precedente si può scrivere come rotore in tutti i semispazi

del tipo $z > 0$, $z < 0$, $x > 0$, $x + y < 0$.

Volevamo è un rotore puro in $\mathbb{R}^3 \setminus$ semiasse qualunque (provare a scrivere di cosa è rotore)



Nella dim. del p.to ②, così come nella dim. del cambio di variabili a partire da GG, il passaggio non scontato sono le primitive rispetto ad una variabile.

Non è così scontato che dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, esiste $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F_z(x, y, z) = f(x, y, z)$ in tutto Ω .

Questo è evidente solo localmente, ad esempio in un parallelepipedo.

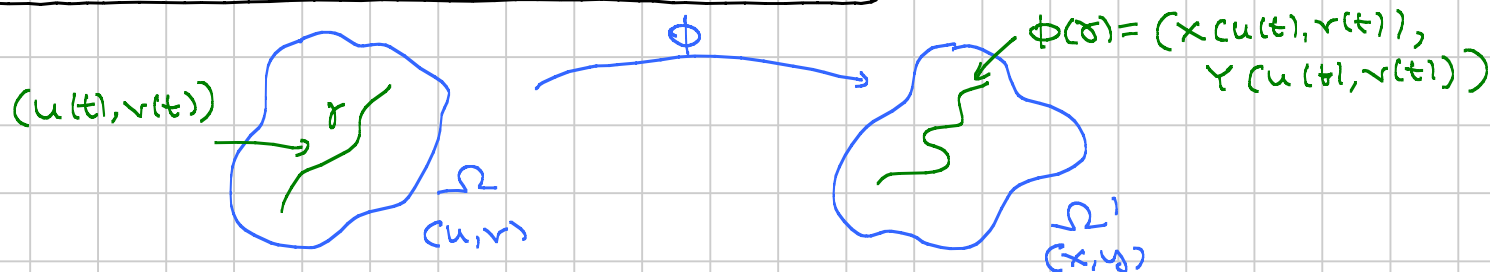
Se voglio la primitiva in y potrei porre



$$F(x, y) = \int_0^y f(x, t) dt$$

— 0 — 0 —

PULL BACK DI FORME DIFFERENZIALI



$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Data una forma diff. in Ω'

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

Posso ottenere una forma ω' su Ω tale che

$$\int_{\gamma} \omega' = \int_{\phi(\gamma)} \omega$$

per ogni curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$. Chi è ω' ?

Facciamo il conto

$$\begin{aligned} \int_{\phi(\gamma)} \omega &= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\ &= \int_a^b [A(\dots)[x_u \dot{u} + x_v \dot{v}] + B(\dots)[y_u \dot{u} + y_v \dot{v}]] dt \\ &= \int_a^b (Ax_u + By_u) \dot{u} + (Ax_v + By_v) \dot{v} \\ &= \int_{\gamma} [A(x(u,v), y(u,v)) x_u(u,v) + B(\dots) y_u(\dots)] du \\ &\quad + [A(\dots) x_v + B(\dots) y_v] dv \end{aligned}$$

Quindi

$$\omega' = (A(\dots) x_u + B(\dots) y_u) du + (A(\dots) x_v + B(\dots) y_v) dv$$

Interpretazione brutale di come tornano indietro le formule

$$\begin{aligned} x &= X(u,v) & y &= Y(u,v) \\ dx &= X_u du + X_v dv & dy &= Y_u du + Y_v dv \end{aligned}$$

$$A dx + B dy \rightsquigarrow A(X(u,v), Y(u,v)) (X_u du + X_v dv) + B(\dots) (Y_u du + Y_v dv)$$

Facendo il conto brutale torna la formula ottenuta rigorosamente sopra.