

Dimostrazione della formula di Stokes

Strategia: parametrizzo la superficie, riporto tutto in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e lì uso Gauss-Green

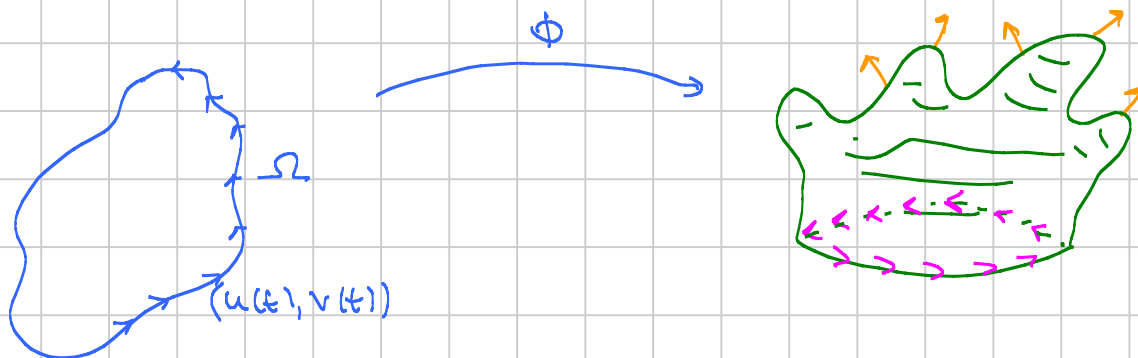
$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} A dx + B dy + C dz \quad \vec{E} = (A, B, C)$$

Fissiamo una parametrizzazione di S :

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto abbastanza regolare

Chiamiamo (u, v) le variabili in Ω e poniamo

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$



Supponiamo che $\partial\Omega$ sia il supporto di una o più curve

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [a, b]$$

che lo percorrono lasciando Ω a sinistra. In queste ipotesi il bordo ∂S è percorso positivamente dalla curva

$$(x(t), y(t), z(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$$

Dim. di Stokes Scrivo RHS e LHS usando la parametrizz.

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

Allora

$$\text{LHS} = \int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{m} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (C_y - B_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (-C_x + A_z)(-x_u z_v + z_u x_v) + (B_x - A_y)(x_u y_v - y_u x_v) du dv$$

Volevamo posso espandere il prodotto ... limitiamoci a scrivere i 4 termini con la A ...

$$\boxed{A_z (-x_u z_v + z_u x_v) - A_y (x_u y_v - y_u x_v)}$$

$$\downarrow$$

$$A_z (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) [-x_u(u,v) z_v(u,v) + \dots]$$

Occupiamoci ora del RHS:

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\partial S^+} A dx + B dy + C dz \\ &= \int_a^b A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + B(\dots) \dot{y}(t) + C(\dots) \dot{z}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \rightsquigarrow \dot{x}(t) = x_u(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + x_v(\dots) \dot{v}(t) \\ &\rightsquigarrow \dot{y}(t) = y_u(\dots) \dot{u}(t) + y_v(\dots) \dot{v}(t) \\ &\rightsquigarrow \dot{z}(t) = z_u(\dots) \dot{u}(t) + z_v(\dots) \dot{v}(t) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_a^b \int_a^b (X_u \dot{u} + X_v \dot{v}) + B(\dots)(Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}) + C(\dots)(Z_u \dot{u} + Z_v \dot{v}) \\ &= \int_a^b \underbrace{(A X_u + B Y_u + C Z_u)}_{A(x(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))} \dot{u} + (A X_v + B Y_v + C Z_v) \dot{v} \, dt \\ &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{(A X_u + B Y_u + C Z_u)}_{\hat{D}} du + \underbrace{(A X_v + B Y_v + C Z_v)}_{\hat{E}} dv \\ &= \text{integrale di una forma differenziale su } \partial\Omega \end{aligned}$$

Applico Gauss - Green in Ω

$$\boxed{\iint_{\Omega} (\hat{E}_u - \hat{D}_v) du dv = \int_{\partial\Omega} \hat{D} du + \hat{E} dv}$$

Questa arriva dalla classica

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, du dv &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds & \vec{E} &= (A, B) \\ \iint_{\Omega} (A_u + B_v) du dv &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{A}_{\hat{E}} dv - \underbrace{B}_{\hat{D}} du \end{aligned}$$

Morale

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\partial\Omega} \hat{D} du + \hat{E} dv = \iint_{\Omega} (\hat{E}_u - \hat{D}_v) du dv \\ &= \iint_{\Omega} (A X_v + B Y_v + C Z_v)_u \\ &\quad - (A X_u + B Y_u + C Z_u)_v \end{aligned}$$

Se faccio le derivate o ottengo quello che c'era al LHS ho finito.

Nel fare il conto, limitiamoci ai termini con A :

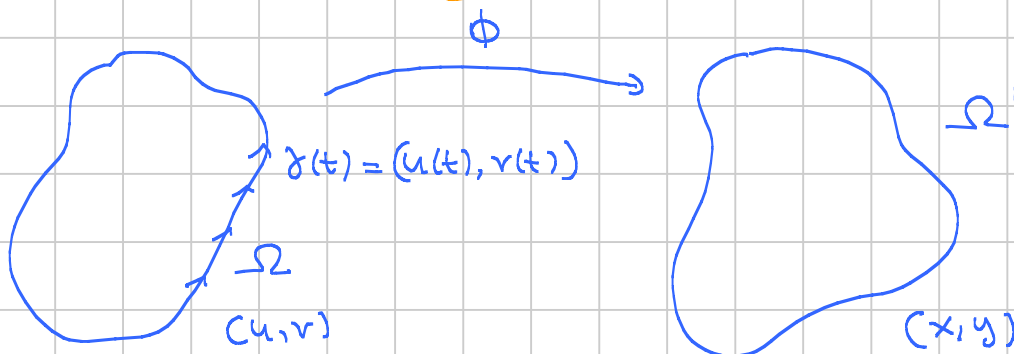
$$\cancel{A_x X_u X_v} + A_y Y_u X_v + A_z Z_u X_v + \cancel{A X_{ru}} \\ - \cancel{A_x X_r X_u} - A_y Y_v X_u - A_z Z_v X_u - \cancel{A X_{uv}}$$

$$= \boxed{A_y (Y_u X_v - Y_v X_u) - A_z (Z_v X_u - Z_u X_v)}$$



Back to cambio di variabili negli integrali

Due variabili



Aggiunto dopo video: a guardarla bene questa dimostrazione non usa che $\text{Det } J_\phi$ ha un segno fisso in Ω . Basta sapere se ϕ conserva o no il verso di percorrenza del bordo per sistemare i segni (e ovviamente che $\phi(\partial\Omega) = \partial\Omega'$).

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v)) \quad \text{invertibile}$$

$\partial\Omega'$ è parametrizzato, non so in che verso, da $\phi(\gamma(t))$, cioè

$$(x(t), y(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)))$$

Data $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ voglio calcolare $\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy$.

Introduco una funzione $F(x, y)$ t.c. $F_x(x, y) = f(x, y)$.

Inizio il conto:

$$\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} \text{div}(F(x, y), 0) dx dy$$

$$(\text{Gauss-Green}) = \int_{\partial\Omega'} F(x, y) dy$$

$$= \pm \int_a^b F(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt$$

$$= \pm \int_a^b F(x(u(t), v(t)), Y(\dots)) [Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}] dt$$

$$= \pm \int_a^b F(\dots) Y_u \dot{u} + F(\dots) Y_v \dot{v} dt$$

$$= \pm \int_{\partial\Omega} F(\dots) Y_u du + \underbrace{F(\dots) Y_v}_{\downarrow} dv$$

$$F(x(u, v), Y(u, v)) Y_v(u, v)$$

$$= (\text{Gauss-Green in } \Omega) = \pm \iint_{\Omega} [F Y_v]_u - [F Y_u]_v du dv$$

$$= \pm \iint_{\Omega} \{ F_x X_u Y_v + \cancel{F_y Y_u Y_v} + \cancel{F_{xu}} - F_x X_v Y_u - \cancel{F_y Y_x Y_u} - \cancel{F_{xv}} \}$$

$$= \pm \iint_{\Omega} f(x(u, v), Y(u, v)) \underbrace{\{ X_u Y_v - X_v Y_u \}}_{J\phi(u, v)} du dv$$

Per decidere il segno, uso $f(x, y) \equiv 1$: all'inizio trovo Area(Ω), alla fine

$$\pm \iint_{\Omega} J\phi(u, v) du dv$$

↑ sempre pos. o sempre negativo,
quindi il segno giusto è quello che
fa comparire il valore assoluto.

— o — o —

Vantaggi di questa dim.: dura $\frac{1}{3}$ di les. contro 3 lezioni

Svantaggi: $\rightarrow$ è semplice solo in $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ serve $\partial\Omega$ regolare
 $\rightarrow$ ho usato che ϕ è C^2 e si estende fino al bordo
 $\rightarrow$ ho assunto f almeno continua
 $\rightarrow$ usa G.G. che è avanzato rispetto agli integrali.