

QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN INTEGRALE DI FLUSSO

Situazione classica: sono dati

→ una superficie

→ una orientazione della sup.

→ un campo $\vec{E} = (A, B, C)$

Obiettivo: calcolo

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie

ROAD MAP 1 Usare formula diretta, quindi

① Scrivo una param. di S

② Controllo il segno da mettere a (u_1, u_2, u_3) per avere l'orientazione giusta

③ Calcolo

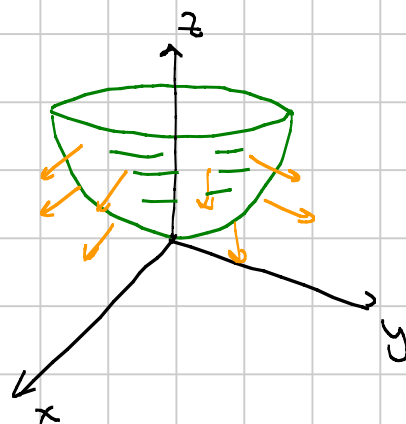
$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (Au_1 + Bu_2 + Cu_3) du dv$$

Esempio

$$z = x^2 + y^2, z \leq 1$$

$\vec{n}$ = "verso il basso"

$$\vec{E} = (x, y-z, xy-2z)$$



① $\vec{E}$ una sup. cartesiana, quindi

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \quad \text{con } \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

② $\Phi_u = (1, 0, 2u)$

$\Phi_v = (0, 1, 2v)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

Ma il segno giusto? Nell'origine diventa $(0, 0, 1)$, quindi il segno è sbagliato, quindi bisogna mettere un $-$

③ Calcolo finale

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \oint_{\Omega} AM_1 + BM_2 + CM_3 \, du \, dv \\ &= - \int_{\Omega} \underbrace{u}_{\uparrow A} \underbrace{(-2u)}_{\uparrow M_1} + \underbrace{(v - u^2 - v^2)}_{\uparrow B} \underbrace{(-2v)}_{\uparrow M_2} + \underbrace{(uv - 2u^2 - 2v^2)}_{\uparrow C} \underbrace{1}_{\uparrow M_3} \\ &= \int_{u^2 + v^2 \leq 1} [2u^2 + 2v(v - u^2 - v^2) + (2u^2 + 2v^2 - uv)] \, du \, dv \\ &= \text{integrale doppio tranquillo.} \end{aligned}$$

Vantaggi / svantaggi della RM 1 $\rightarrow$ si può usare sempre
 $\rightarrow$ occorre calcolare (M_1, M_2, M_3)

ROAD MAP 2 Sperare in Stokes

- ① Spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$
- ② TROVO $\vec{F}$
- ③ Uso Stokes

Applichiamolo all'esempio di prima

$$\textcircled{1} \vec{E} = (x, y-z, xy-2z) \quad \text{div } \vec{E} = 1+1-2=0 \quad \text{si!} \quad \text{☺}$$

② Trovo $\vec{F}$ $(C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y) = \vec{E}$

Poniamo $B=0$

$$C_y = x$$

$$C = xy + \varphi(x, z)$$

$$-C_x + A_z = y - z$$

$$-A_y = xy - 2z \quad A = -\frac{1}{2}xy^2 + 2zy$$

Sostituisco nella 2^a:

$$-y - \varphi_x + 2y = y - z \quad \leadsto \varphi(x, z) = zx$$

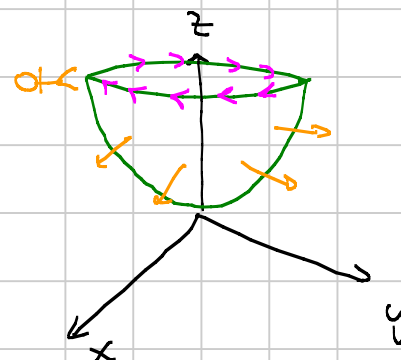
Conclusione $\vec{F} = (\underbrace{-\frac{1}{2}xy^2 + 2zy}_{\hat{A}}, \underbrace{0}_{\hat{B}}, \underbrace{xy + xz}_{\hat{C}})$

③ Uso Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\partial S^+} \hat{A} dx + \hat{B} dy + \hat{C} dz$$

Non resta che scrivere per bene ∂S , con l'orientazione giusta!

$$(\cos\theta, \sin\theta, 1) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



con l'orientazione cambiata.

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \underbrace{-}_{\pi} \int_0^{2\pi} (\underbrace{-\frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta + 2\sin\theta}_{\hat{A}}) \underbrace{(-\sin\theta)}_{\hat{C}_0} d\theta$$

I termini con $\hat{B} dy$ vengono 0 e anche $\hat{C} dz$ produce solo 0 perché $\vec{z}(t) = 0$.

= si fa in un istante (controllare che venga lo stesso).

Vantaggi / Svantaggi

→ serve $\text{div } \vec{E} = 0$

→ bisogna trovare $\vec{F}$

→ l'integrale finale è 1-dim

ROAD MAP 3

Uso Stokes senza inventare il rotore

- ① Spero che $\vec{E}$ sia $\text{rot } \vec{F}$ per un certo $\vec{F}$
- ② Cambio la sup. con una che ha lo stesso bordo.
- ③ Calcolo il flusso sulla nuova superficie.

Oss. Fondamentale Se $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ e $\partial S_1 = \partial S_2$, allora

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Dim.

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \stackrel{\vec{E} = \text{rot } \vec{F}}{\downarrow} = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$\text{Stokes} \rightarrow = \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle ds$$

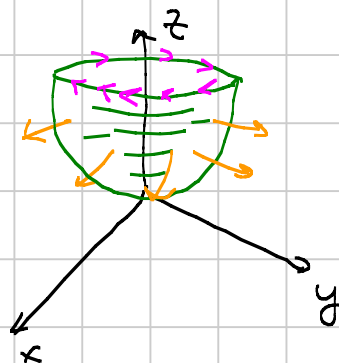
$$\text{stesso bordo} \rightarrow = \int_{\partial S_2} \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle ds$$

$$= \int_{S_2} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Nell'esempio

① Ok, $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$

- ② Scelgo una sup. con lo stesso bordo.
In questo caso prendo il cerchio superiore, orientato con la normale verso il basso.



$$S_2 = (x, y, 1) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- ③ Calcolo il flusso su S_2

$$\int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (xy-2) \cdot \underset{(0,0,-1)}{(-1)} dx dy = \text{banale}$$

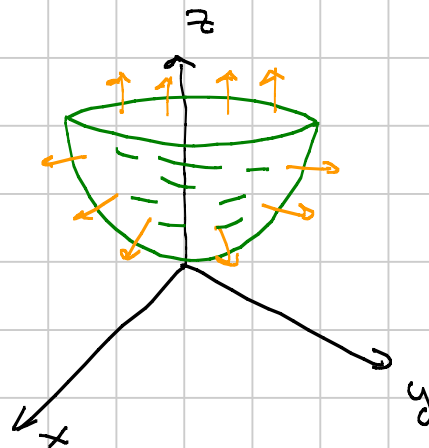
Vantaggi / svantaggi : $\rightarrow$ serve dir $\vec{E} = 0$
 $\rightarrow$ non serve trovare $\nabla \cdot$
 $\rightarrow$ resta integrale 2-dim.
 — o — o —

ROAD MAP 4 Uso Gauss-Green dopo aver chiuso il dominio !!

- ① Chiudo il dominio
- ② Uso Gauss-Green

Nell'esempio, considero il solido
 $V \subseteq \mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$$



Gauss-Green dice che

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$
normale esterna a V

e nel nostro caso $\iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{\text{quello che serve a noi}} + \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

$\uparrow$
 $(0, 0, 1)$

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz - \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Vantaggi / svantaggi

- $\rightarrow$ Funziona sempre (non serve che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$)
- $\rightarrow$ Bisogna calcolare un integrale 3-dim. e uno 2-dim.
 — o — o —