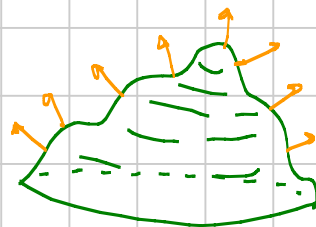


ORIENTAZIONE DI UNA SUPERFICIE

Una orientazione di una superficie è una scelta continua del verso normale.

Se la sup. è descritta parametricamente da

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$



allora le due orientazioni possibili sono date da

$$\vec{n} = \pm \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}$$

$$\text{dove } (M_1, M_2, M_3) = \phi_u \wedge \phi_v$$

Orientazione del bordo di una superficie

Achtung! Il bordo di una superficie NON è la sua frontiera topologica !!!



Se S è il supporto della semisfera, la sua frontiera topologica è lei stessa

Semidef. Se la superficie è data una parametrizzazione

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

↑ chiusura di un aperto in $\mathbb{R}^2$

allora definiamo bordo della superficie la curva (o le curve) che si ottengono come immagine di $\partial\Omega$

↑ frontiera topologica di Ω in $\mathbb{R}^2$

Achtung! Pensiamo ad un cilindro:

$$(\vartheta, z) \rightarrow (\cos \vartheta, \sin \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\uparrow$$
$$[0, 2\pi] \times [0, 4] = \Omega$$

In questo caso l'immagine di $\partial\Omega$ è.

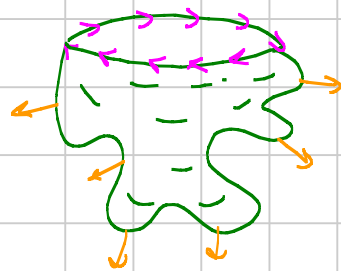
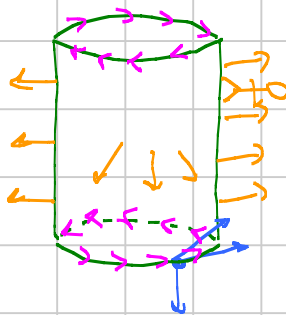
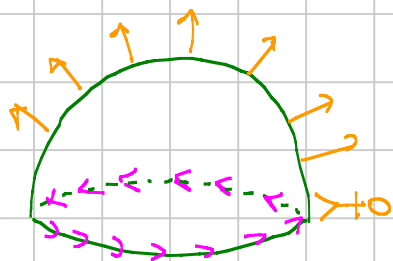


Orientare il bordo di una sup. vuol dire scegliere un verso di percorrenza in ogni curva che compone il bordo. Quale scegliere?

Orientazione canonica del bordo di una sup. orientata

È il verso in cui deve percorrere il bordo un uomo su piedi secondo l'orientazione della sup. in modo da lasciare la sup. alla sua sinistra

Esempi



Detto meglio: i seguenti 3 vettori nell'ordine

→ normale esterna alla sup (mi metto nel piano tg. e pinto fuori)

→ tangente al bordo

→ vettore normale alla sup

devono essere una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la base canonica

Fatto generale: se la sup. è orientata da $\Phi_u \wedge \Phi_v$, allora il bordo è orientato prendendo $\partial\Omega$ lasciando Ω a sx.

FORMULA DI STOKES

TEOREMA DEL ROTORE

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

versore tangente al bordo

Detto dai fisici: il flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso la superficie è uguale alla circuitazione di $\vec{E}$ lungo il bordo della superficie.

Supponiamo $\vec{E} = (A, B, C)$ e supponiamo S parametrizzata da $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Allora

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y) \cdot \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\| (M_1, M_2, M_3) \|} \cdot \| (M_1, M_2, M_3) \| du dv$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} M_1 (C_y - B_z) + M_2 (-C_x + A_z) + M_3 (B_x - A_y) du dv$$

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} A dx + B dy + C dz$$

bordo di S orientato come indicato precedentemente

Supponiamo che $x(t), y(t), z(t)$ percorrano ∂S . Allora

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle d\sigma = \int (A, B, C) \cdot \frac{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \sqrt{\dots} dt = \int A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}$$

COME DETERMINO SE UN CERTO VETTORE È UN ROTORE?

$$(x+y, x-y+z^2, z-3)$$

Guardo la divergenza! Se $\text{div} \neq 0$, allora non può essere un rotore!!! Abbiamo visto infatti che $\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0$

$$1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{no rotore}$$

Se invece la $\text{div} = 0$, allora può essere un rotore e lo è se l'insieme di definizione è un parallelepipedo

Esempio $\vec{F} = (x+y, y+zx, -2z+x^2y)$

$\text{div } \vec{F} = 1+1-2=0$. $\vec{F}$ è definito ovunque, quindi esiste $\vec{E}$ tale che $\text{rot } \vec{E} = \vec{F}$.

Come trovo $\vec{E}$? Pongo $\vec{E} = (A, B, C)$. Devo risolvere

$$\begin{cases} C_y - B_z = x+y \\ -C_x + A_z = y+zx \\ B_x - A_y = -2z+x^2y \end{cases}$$

Batteremo $C \equiv 0$:

$$\begin{aligned} -B_z &= x+y & \leadsto B &= -xz - yz + \varphi(x,y) \\ A_z &= y+zx & \leadsto A &= yz + \frac{1}{2}z^2x + \psi(x,y) \\ B_x - A_y &= -2z+x^2y \end{aligned}$$

Batteremo = 0 una delle due funzioni φ e ψ , ad esempio $\psi(x,y)$

$$B = -xz - yz + \varphi(x,y), \quad A = yz + \frac{1}{2}z^2x$$

Sostituisco nella 3ª relazione e trovo $\varphi(x,y)$:

$$B_x - A_y = -\cancel{z} + \varphi_x - \cancel{z} = -\cancel{2z} + x^2 y \quad \varphi_x = x^2 y$$

la semplificazione segue dalla d'ir $\Rightarrow$

$$\leadsto \varphi = \frac{1}{3} x^3 y.$$

In conclusione $\vec{E} = (yz + \frac{1}{2} z^2 x, -xz - yz + \frac{1}{3} x^3 y, 0)$

Domanda successiva: come sono fatti tutti gli $\vec{E}$ t.c. $\text{rot} \vec{E} = \vec{F}$

Se ho un'altra soluzione $\text{rot} \vec{E}_1 = \vec{F}$, allora

$$\text{rot} (\vec{E}_1 - \vec{E}) = 0 \quad \leadsto \quad \vec{E}_1 - \vec{E} = \nabla \varphi \quad \text{per una opportuna } \varphi(x, y, z)$$

Se volessi ottenere $y \sin z$ alla terza componente, basta aggiungere

$$\nabla (y \cos z)$$

Conclusione : c'è tanta libertà nella scelta di $\vec{E}$ tale che $\text{rot} \vec{E} = \vec{F}$ dato.

— o — o —