

PARTIZIONI DELL'UNITÀ

Problema generale: c'è un enunciato che funziona in situazioni speciali locali (ad esempio il teo. div. sugli insiemi normali). Voglio dire che funziona in grande.

LOCALE $\rightsquigarrow$ GLOBALE

Supponiamo nel piano di avere una successione $\{R_n\}$ di rettangoli tali che

(i) ricoprono tutto il piano $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int}(R_n)$

(ii) ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ interseca solo un numero finito di rettangoli.

Ad esempio, posso prendere una "quasrettatura allargata" del piano

Allora esiste una successione di funzioni $\psi_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ con queste proprietà:

→ $\psi_n(x) = 0$ se $x \notin R_n$ (ψ_n è nulla fuori da R_n)

→ $\psi_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

→ $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

↑
questa somma ha un numero finito di addendi su ogni $x \in \mathbb{R}^2$ per la (ii)

La succ. $\{\psi_n\}$ si dice PARTIZIONE DELL'UNITÀ relativa ad $\{R_n\}$.

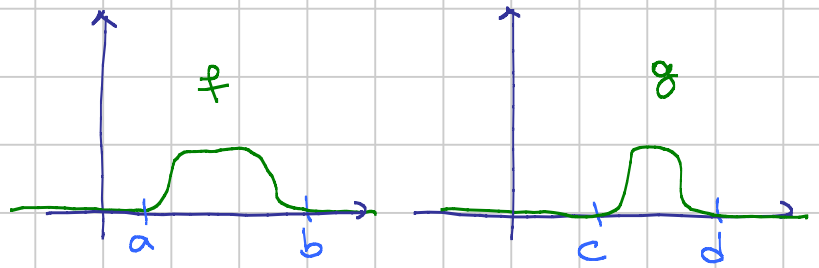
Dim. dell'esistenza

In ogni rettangolo costruisco una funzione C^∞ che è nulla fuori dal rettangolo e positiva dentro. La chiamo $\varphi_m(x)$

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

basta porre

$$\varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$



A questo punto pongo

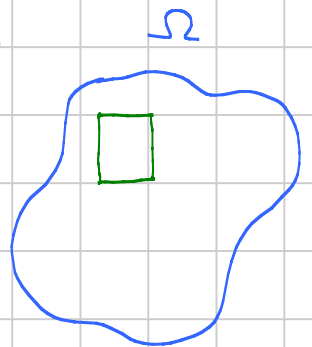
$$\psi_m(x) = \frac{\varphi_m(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)}$$

Osservo che il denominatore è una funzione C^∞ perché in ogni palla B_r è somma di un numero finito di funzioni C^∞ .

— o — o —

Ancora casi speciali del teorema della divergenza

- 1 Supporto di A e B contenuto in un rettangolo $R \subseteq \text{Int}(\Omega)$. Allora vale il teorema della divergenza

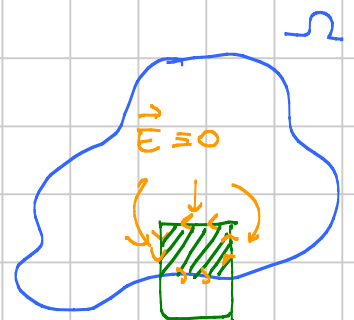


$$\iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} = \iint_R \text{div } \vec{E} = \iint_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = 0 = \iint_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$\uparrow$ ∂R $\uparrow$ $\partial \Omega$
 R è normale A e B si annullano su ∂R ... su $\partial \Omega$

- 2 Supporto di A e B contenuto in un rettangolo R la cui intersezione con Ω è un insieme normale. Allora anche qui vale teo. div.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} &= \iint_{R \cap \Omega} \text{div } \vec{E} = \int_{\partial(R \cap \Omega)} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \\ &= \int_{\partial \Omega \cap R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \end{aligned}$$



Dim. generale di teo. dia.

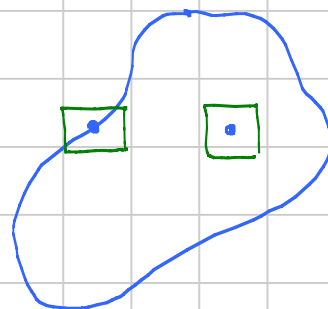
① Prendo Ω . Per ogni punto x costruisco un rettangolo R_x in questo modo

→ se $x \in \text{Int}(\Omega)$ faccio in modo che $R_x \subseteq \text{Int}(\Omega)$

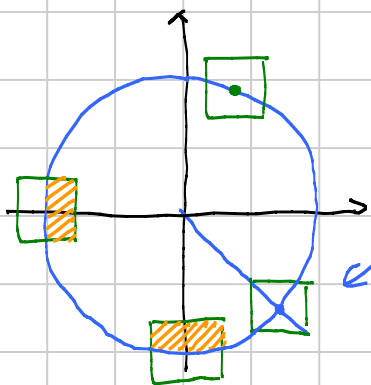
→ se $x \in \partial\Omega$ faccio in modo che $R_x \cap \Omega$ sia un insieme normale

In ogni caso x è il centro di R_x

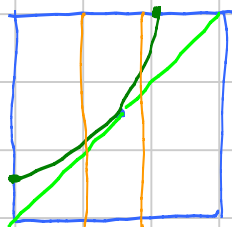
Oss. In alcuni testi si trova la stessa costruzione con i quadrati, ma non funziona!!!



Esempio



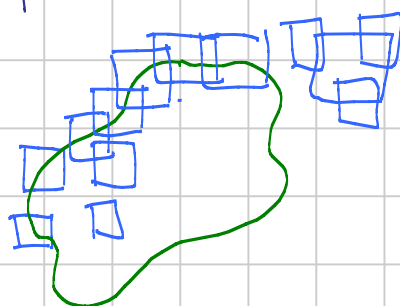
in ogni quadrato centrato in un p.to della diagonale la restrizione tocca due lati adiacenti



I vari R_x pensati come rettangoli aperti, costituiscono un ricoprimento di $\bar{\Omega}$, quindi posso estrarne un sottoricoprimento finito, avendo così un numero finito di rettangoli la cui parti interne ricoprono $\bar{\Omega}$.

A questi posso aggiungere altri rettangoli che NON intersecano $\bar{\Omega}$ in modo da ricoprire $\mathbb{R}^2$ come nella partizione dell'unità.

Prendo una partizione dell'unità relativa a questi rettangoli.



uso solo rettangoli che ricoprono $\bar{\Omega}$

$$\iint_{\Omega} A_x dx dy = \iint_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^k \psi_n A \right)_x dx dy$$

$$= \sum_{n=1}^k \iint_{\Omega} (\psi_n A)_x dx dy$$

il supporto è contenuto in un rettangolo "buono", quindi qui vale teorema della divergenza come visto sopra

$$= \sum_{n=1}^k \int_{\partial\Omega^+} (\psi_n A) dy$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} \left(\sum_{n=1}^k \psi_n A \right) dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy$$

Nello stesso identico modo si dimostra che

$$\iint_{\Omega} B_y dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -B dx$$

e questo completa la dimostrazione (che volevo si poteva fare direttamente con $\vec{E}$).

— o — o —

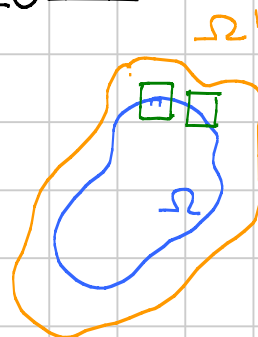
Sotto quali ipotesi abbiamo dimostrato te. divergenza

→ Le componenti di E sono di classe C^1 su un aperto $\Omega' \supseteq \bar{\Omega}$

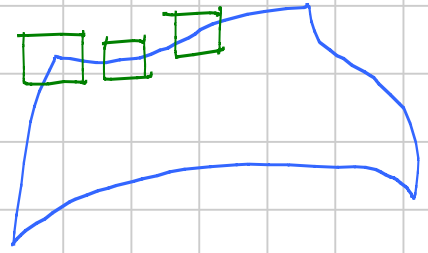
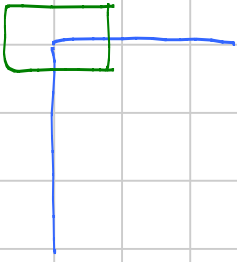
→ In ogni punto di $\partial\Omega$ esiste un rettangolo R centrato in quel punto tale che

$$\Omega \cap R$$

è un insieme normale rispetto all'asse x o all'asse y .



Osservazione Questo sistema il teorema se Ω è regolare.
Se ω sono degli angoli



Negli angoli non c'è un rettangolo "dritto", ma magari c'è un rettangolo ruotato



normale rispetto a questa base

Morale: se dimostro la formula per gli insiemi ruotati posso gestire anche insiemi Ω con $\partial\Omega$ regolare a tratti (e volendo usare sempre i quadrati)

— o — o —