

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} (-Bdx + A dy)$$



Prendiamo una forma diff. $\omega = Cdx + Ddy$

Prendiamo due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi e nessuna altra intersezione.

Supponiamo che ω sia definita e suff. regolare in tutto l'intorno di un Ω delimitato dalle due curve. Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} (Cdx + Ddy) \quad D=A, B=-C$$

$$= \iint_{\Omega} \underbrace{(D_x - C_y)}_{=0 \text{ se } \omega \text{ è chiusa}} dx dy$$

Quindi

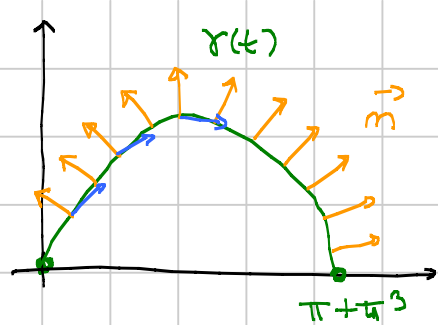
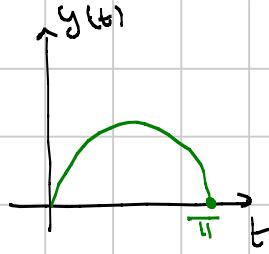
ω chiusa $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ più di sapere che γ_1 e γ_2 percorrono il bordo $\partial\Omega$ di un Ω su cui ω è ben definita.

— o — o —

Esempio 1 $\vec{E} = (y^2 \arctan y, x \sin(x^3))$

$$\gamma(t) = (t + t^3, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ lungo γ pensando al flusso dal basso verso l'alto.



$\gamma(t)$ è una curva semplice non chiusa.

1° modo Scrivo il vettore $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \underbrace{(-\dot{y}, \dot{x})}_{\substack{\uparrow \\ \text{rotazione antioraria del} \\ \text{tangente}}}$

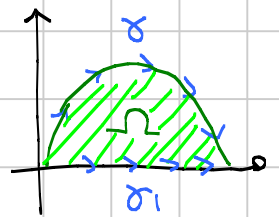
Quindi calcolo l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \int_{\gamma} -A dy + B dx \\ &= \int_0^{\pi} (\sin t)^2 \arctan(\sin t) \cdot (\cos t) + \dots \\ &= \text{contaccio.} \end{aligned}$$

2° modo Provo ad usare il teo. della divergenza.

Considero l'insieme Ω delimitato dalla curva γ e dall'asse x .

Applico teo della divergenza



$$\underbrace{\iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, dx \, dy}_0 = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi^3 + \pi]$$

$$= \int_{\gamma_1} (-B dx + A dy) - \int_{\gamma} (-B dx + A dy)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} -B dx + A dy &= \int_{\gamma_1} (-B dx + A dy) = - \int_0^{\pi^3 + \pi} t \sin(t^3) \cdot 1 \, dt \\ &= \text{si fa} \end{aligned}$$

Occhio all'orientazione. Quello che mi serve è

$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} -A dy + B dx, \text{ quindi alla fine devo cambiare il segno.}$$

↑
vedi formula per $\vec{n}$
ottenuta nel primo modo.

LAPLACIANO IN COORDINATE POLARI

Motivazione Data una funzione $u(x,y)$ il suo laplaciano è

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$$

La funzione u la posso pensare in coord. polari

$$u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = v(\rho, \theta)$$

Posso fare la stessa operazione sul laplaciano, cioè

$$\Delta u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Domanda: quale operazione sulla $v(\rho, \theta)$ produce lo stesso risultato?

Esempio $u(x,y) = x^2 y + y^3$

$$\begin{aligned} u_x &= 2xy & u_{xx} &= 2y \\ u_y &= x^2 + 3y^2 & u_{yy} &= 6y \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u(x,y) = 8y$$

$$\Delta u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 8\rho \sin \theta$$

$$\begin{aligned} v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta + \rho^3 \sin^3 \theta \\ &= \rho^3 \sin \theta \end{aligned}$$

Quale operazione su v produce $8\rho \sin \theta$

Conto $u(p, \theta) = u(p \cos \theta, p \sin \theta)$. Calcolo con la chain rule le derivate parziali

$$u_p = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$

$$u_\theta = -u_x p \sin \theta + u_y p \cos \theta$$

$$u_{pp} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$$u_{\theta\theta} = u_{xx} p^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} p^2 \cos \theta \sin \theta + u_{yy} p^2 \cos^2 \theta - u_x p \cos \theta - u_y p \sin \theta$$

Quindi

$$\begin{aligned} u_{pp}(p, \theta) + \frac{1}{p^2} u_{\theta\theta}(p, \theta) &= u_{xx}(p \cos \theta, p \sin \theta) + u_{yy}(\dots, \dots) \\ &\quad - u_x \frac{1}{p} \cos \theta - u_y \frac{1}{p} \sin \theta \rightarrow \frac{1}{p} u_p \\ &= \Delta u(p \cos \theta, p \sin \theta) \end{aligned}$$

Concludendo

$$\Delta u = u_{pp} + \frac{1}{p^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{p} u_p$$

Nell'esempio in effetti $u = p^3 \sin \theta$

$$u_p = 3p^2 \sin \theta$$

$$u_\theta = p^3 \cos \theta$$

$$u_{pp} = 6p \sin \theta$$

$$u_{\theta\theta} = -p^3 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} u_{pp} + \frac{1}{p^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{p} u_p &= 6p \sin \theta - p \sin \theta + 3p \sin \theta \\ &= 8p \sin \theta \quad \text{😊} \end{aligned}$$

Esercizio trovare tutte le funzioni radiali tali che $\Delta u = 0$

Passando in coord. polari si ottiene che $u(p, \theta)$ non dipende da θ , quindi $u_{\theta\theta} = 0$. Quindi bisogna risolvere

$$u_{pp} + \frac{1}{p} u_p = 0$$

Ponendo $y(p) = u_p(p)$ abbiamo $\ddot{y} + \frac{1}{p} y = 0$

che è una equazione del 1° ordine a variabili separabili

$$y' = -\frac{1}{p} y \quad \leadsto \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p} \quad \leadsto \quad \log |y| = -\log p + c$$

$$\leadsto |y| = \frac{k}{p} \quad \text{per una opportuna costante } k \in \mathbb{R}, \text{ quindi}$$

$$v_p(p) = \frac{k}{p} \quad \leadsto \quad \boxed{v(p) = k \log p + c}$$

Tranne quella con $k=0$, tutte le altre divergono nell'origine.
— o — o —

Esercizio Fare Laplaciano in coord. sferiche e trovare le sol. radiali di $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3$.
— o — o —