

Teorema della divergenza e applicazioni

Sotto opportune ipotesi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Ci sono 2 modi di pensare il RHS:

- ① come integrale di flusso
- ② come integrale di una forma differenziale

$$\vec{E} = (A(x, y), B(x, y))$$

$$t \in [a, b]$$

$\partial\Omega$  sia il supporto di una o più curve  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  che lo percorrono "lasciando  $\Omega$  a sinistra". In queste ipotesi

$$\text{vettore tangente} = \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \underbrace{(+\dot{y}, -\dot{x})}_{\substack{\uparrow \\ \text{rotato orario} \\ \text{del tangente}}}$$

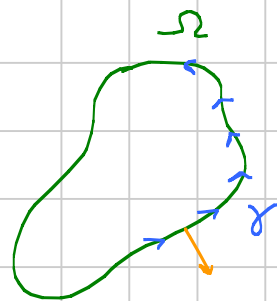
Quindi

$$\int_{\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_a^b A \dot{y} - B \dot{x} \, dt = \int_{\gamma} -B \, dx + A \, dy$$

In conclusione possiamo riscrivere il teorema come

$$\int_{\Omega} (A_x + B_y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} -B \, dx + A \, dy$$

$\uparrow$  una o più curve che percorrono  $\partial\Omega$  come previsto



## Applicazioni classiche

- ① Calcolo di integrali di flusso
- ② Calcolo di integrali su domini descritti mediante il bordo.

Caso tipico: calcolo dell'area



Data una curva chiusa  $\gamma(t)$  nel piano, calcolare l'area del dominio che racchiude.

Supponiamo la curva semplice e che lasci il dominio a sx.

Applico la formula precedente con  $\vec{E} = (x, 0)$

Allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_{\gamma} y \, dx$$

In alternativa posso prendere  $\vec{E} = (0, y)$  da cui

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} -x \, dy$$

Oss. È evidente che le due formule danno lo stesso risultato cioè

$$\int_{\gamma} y \, dx = - \int_{\gamma} x \, dy$$

perché

$$\int_{\gamma} y \, dx + x \, dy = 0$$

perché la forma  $y \, dx + x \, dy$  è chiusa (quindi esatta su  $\mathbb{R}^2$ ) e la curva è chiusa.

Oss. Posso ottenere altre formule "mixando" le 2 precedenti

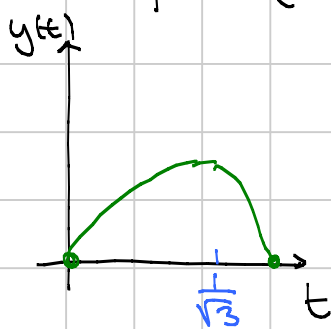
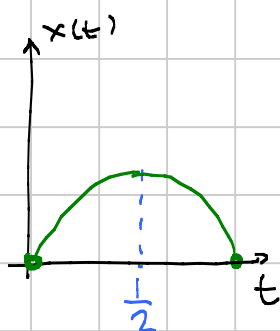
$$\begin{aligned}\text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} \frac{1}{2} y dx - \frac{1}{2} x dy \\ &= \int_{\gamma} \lambda y dx - (1-\lambda) x dy \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} y dx = - \int_{\gamma} x dy = \text{mix von}$$

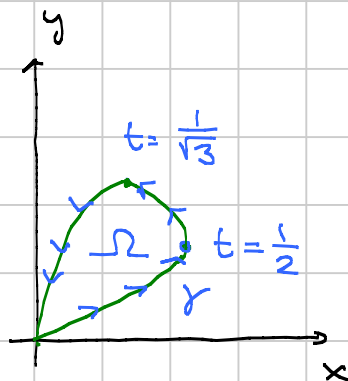
Se  $\gamma(t)$  percorre nel verso sbagliato, bisogna cambiare i segni.

Esempio 1  $\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)}) \quad t \in [0,1]$

Questa è una curva semplice (verifica!)



$$y'(t) = 1 - 3t^2$$



$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} y dx = \int_0^1 y(t) \dot{x}(t) dt = \int_0^1 (t-t^3)(1-2t) dt$$

In alternativa

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma} x dy = - \int_0^1 x(t) \dot{y}(t) dt = - \int_0^1 (t-t^2)(1-3t^2) dt$$

Il secondo integrale si ottiene dal 1° mediante integrazione per parti.

Esempio 2 Calcolare  $\int_{\Omega} (x^2 + y) dx dy$ , dove  $\Omega$  è quello precedente

$$\int_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\gamma} -B dx + A dy$$

Scelgo  $\vec{E} = (A, B) = (\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{2}y^2)$

$$\int_{\Omega} (x^2 + y) dx dy = \int_{\gamma} -\frac{1}{2}y^2 dx + \frac{1}{3}x^3 dy$$

$$= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{2} \underbrace{(t-t^3)}_{y^2}^2 \underbrace{(1-2t)}_{x^2} + \frac{1}{3} \underbrace{(t-t^2)}_{x^3}^3 \underbrace{(1-3t^2)}_{y^2} \right] dt$$

= si fa.

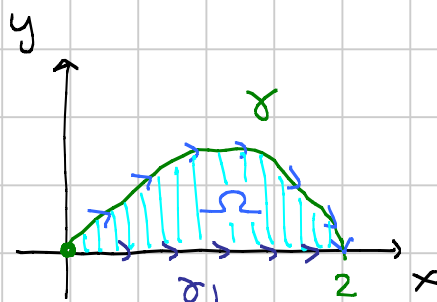
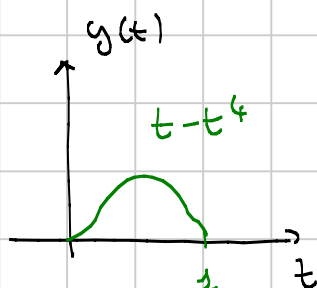
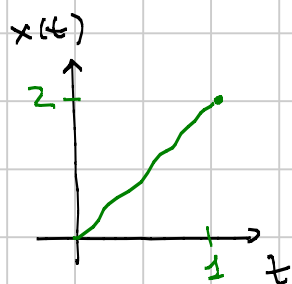
In alternativa potevo usare

$$\vec{E} = (0, x^2y + \frac{1}{2}y^2) \text{ oppure } \vec{E} = (\frac{1}{3}x^3 + xy, 0)$$

o un'altra opportuni.

— o — o —

Esempio 3 Sia  $\Omega$  limitato dalla curva  $\gamma(t) = (t+t^3, t-t^4)$  e dall'asse  $x$ .  $t \in [0, 1]$



Calcolare  $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$

$\partial\Omega^+$  è fatto da 2 curve  $\gamma_1(t) = (t, 0)$  con  $t \in [0, 2]$   
 $\gamma_2(t) = \gamma$  percorsa al contrario

quindi

$$\iint_{\Omega} A_x + B_y \, dx \, dy = \int_{\gamma_1} -B \, dx + A \, dy - \int_{\gamma} (-B \, dx + A \, dy)$$

$\gamma$  va percorsa al contrario

Posso scegliere  $(A, B) = (\frac{1}{2}x^2y^2, 0)$ . In questo modo

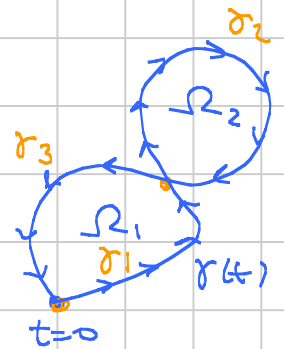
$$\int_{\gamma_1} \underbrace{-B \, dx}_{=0} + \underbrace{A \, dy}_{=0} = 0$$

$$\iint_{\Omega} xy^2 \, dx \, dy = - \int_{\gamma} \frac{1}{2} x^2 y^2 \, dy = - \int_0^1 \frac{1}{2} (t+t^3)^2 (t-t^4)^2 (1-4t^3) \, dt$$

= si fa.

Oss. Se la curva non è semplice, le cose si complicano.

Cosa succede nell'esempio se calcolo



$$\int_{\gamma} y \, dx = \text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2)$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_3} y \, dx}_{\text{Area}(\Omega_1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} y \, dx}_{-\text{Area}(\Omega_2)}$$

$$\int_{\gamma} y \, dx = \underbrace{\int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_3} y \, dx}_{\text{Area}(\Omega_1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} y \, dx}_{\text{Area}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}$$

$$= 2 \text{Area}(\Omega_1) + \text{Area}(\Omega_2)$$

