

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

Setting: data una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
dato un campo di vettori

$$\vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

Operatori differenziali: mandano funzioni / vettori in funzioni / vettori facendo un po' di derivate

GRADIENTE

FUNZIONE $\rightsquigarrow$ VETTORE

$$f(x, y) \rightsquigarrow \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \nabla f(x_1, \dots, x_n) \text{ è il vettore che ha come componenti } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

LAPLACIANO

FUNZIONE $\rightsquigarrow$ FUNZIONE

$$f(x, y) \rightsquigarrow \Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

$\uparrow$ Delta

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \Delta f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x_1, \dots, x_n)$$

Oss. Il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana H_f

DIVERGENZA

ETTORE $\leadsto$ FUNZIONE

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$$

$$\vec{E} = (A_1, \dots, A_n)$$

↑
funzione di
n variabili

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_n)$$

ROTORE

CURL in inglese

ETTORE $\leadsto$ ETORE

VALE SOLO IN $\mathbb{R}^3$

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$\operatorname{rot} \vec{E}$ è lo sviluppo formale del det

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

Oss. In fisica spesso si usa il rotore anche in dimensione due, intendendo che c'è una terza componente nulla

$$\operatorname{rot} (A, B) = \operatorname{rot} (A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

↑ ↑
dipendono
solo da x e y

Oss. (Finestra sul futuro) Il rotore è una semplificazione in $\mathbb{R}^3$ di una cosa più generale, che è il differenziale di 1-forme differenziali.

— o — o —

Osservazioni

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f}$$

Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\operatorname{rot}(\nabla f) = 0} \quad (\text{inversione ordine di derivazione})$$

Sempre in $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) =$

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, -f_{zx} + f_{xz}, f_{xy} - f_{yx})$$

Ultra brutal: operatorialmente la seconda e terza riga sono lin. dipendenti

Osservazione Funziona anche in due variabili con il rotore dei vettori.

$$\textcircled{3} \quad \boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0}$$

$$\text{In } \mathbb{R}^3: \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{div}(C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$= (C_y - B_z)_x + (-C_x + A_z)_y + (B_x - A_y)_z$$

$$= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{A_{zy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0.$$

Oss. Molte cose non hanno senso: $\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot} f$, $\Delta(\operatorname{rot})$
 $\nabla(\operatorname{rot})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{div})$

GRADIENTE Data f funzione

→ Se $\nabla f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{0}$, allora f è localmente costante, quindi costante se Ω è connesso.

→ Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$, allora $f_1 - f_2$ è costante se Ω è connesso

ROTORE Dato $\vec{E} = (A, B, C)$

→ Se $\text{rot } \vec{E} = 0$, allora la forma diff. $A dx + B dy + C dz$ è chiusa, quindi se Ω è semplicemente connesso segue che $\vec{E}$ è il gradiente di una qualche funzione f .

(Stessa cosa in $\mathbb{R}^2$ con il rotore dei fisici e forma $A dx + B dy$)

→ Se $\text{rot } \vec{E}_1 = \text{rot } \vec{E}_2$ e Ω è sempl. connesso, allora esiste una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \nabla f$$

Oss. Se siamo in $\mathbb{R}^2$, p.to (con il rot. dei fisici) o in $\mathbb{R}^3$, retta, allora

$\text{rot } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = \nabla f + \text{multiplo dei coeff. della solita forma chiusa e non esatta.}$

— 0 — 0 —

DIVERGENZA

Dato $\vec{E} = (A, B, C)$ in $\mathbb{R}^3$

→ Se $\text{div } \vec{E} = 0$, allora sotto opportune ipotesi su Ω esiste un campo $\vec{F}$ tale che

$$\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$$

Ad esempio questo vale se Ω è stellato

→ Se $\text{div } \vec{E}_1 = \text{div } \vec{E}_2$, e Ω è stellato, allora

$$\exists \vec{F} \text{ tale che } \vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \text{rot } \vec{F}$$

Oss. $\vec{F}$ non è per nulla unico, in quanto basta aggiungere ad $\vec{F}$ il gradiente di una funzione ed il suo rotore non cambia.

Esercizio Calcolare, dato $\vec{E} = (A, B, C)$

$$- \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) + \nabla(\text{div } \vec{E}) = (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

$$\nabla(\text{div } \vec{E}) = \nabla(A_x + B_y + C_z) =$$

$$= (A_{xx} + B_{yx} + C_{zx}, A_{xy} + B_{yy} + C_{zy}, A_{xz} + B_{yz} + C_{zz})$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ C_y - B_z & A_z - C_x & B_x - A_y \end{pmatrix}$$

$$= (B_{xy} - A_{yy} - A_{zz} + C_{zx}, \dots, \dots)$$