

SUP. DI ROTAZIONE

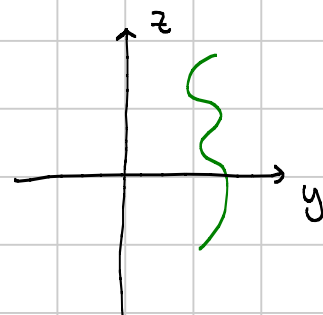
$$\gamma(t) = (y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$y(t) \geq 0$$

Superficie

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$



$$(t, \theta) \in \Omega = [a, b] \times [0, 2\pi]$$

$$\text{Area sup.} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

Oss. Usando gli integrali curvilinei possiamo riscrivere la formula

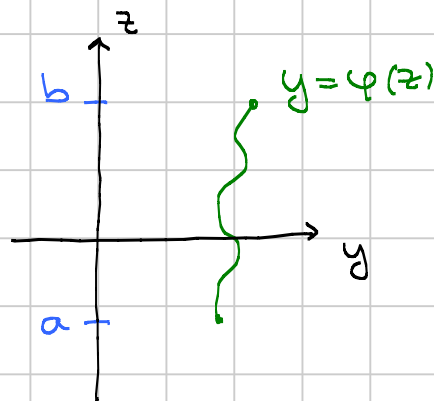
$$\text{Area sup} = 2\pi \int_{\gamma} y ds$$

Caso speciale : curva cartesiana rispetto all'asse z , cioè

$$\gamma(t) = (\varphi(t), t) \quad t \in [a, b]$$

Allora

$$\text{Area sup} = 2\pi \int_a^b \varphi(t) \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)} dt$$



— 0 — 0 —

TEOREMA (GULDINO 2)

lunghezza circ. descritta da G durante la rotazione

$$\text{Area sup rotazione} = \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G$$

dove $\rightarrow \gamma$ è la curva che ruota

$\rightarrow y_G$ è la coord. y del baricentro della curva

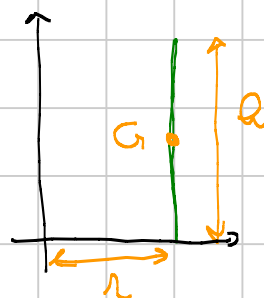
Dim Basta usare le definizioni

$$y_G = \frac{1}{\text{lunghe}(\gamma)} \cdot \int_{\gamma} y \, ds \quad (\text{per definizione})$$

Se moltiplico per $2\pi \text{lunghe}(\gamma)$ ottengo proprio la sup in uno dei tanti modi di scriverla. $\square$

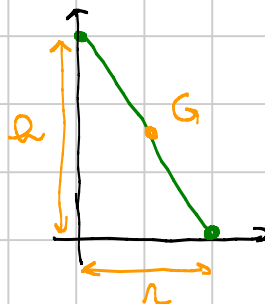
Esempio 1 Cilindro

$$\begin{aligned} \text{Area sup laterale} &= \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G \\ &= R \cdot 2\pi R \end{aligned}$$



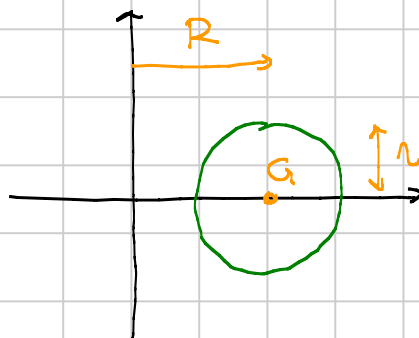
Esempio 2

$$\begin{aligned} \text{Area sup. laterale} &= \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G \\ &= \sqrt{r^2 + h^2} \cdot 2\pi \frac{h}{2} \end{aligned}$$



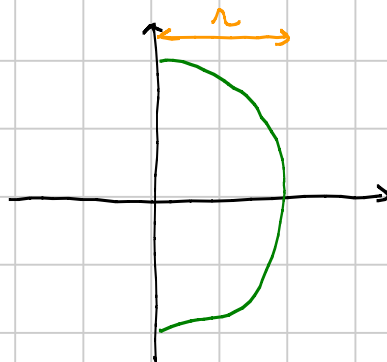
Esempio 3 Toro

$$\begin{aligned} \text{Area sup. totale} &= \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G \\ &= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R \end{aligned}$$



Esempio 4 Sfera

1° modo : uso il baricentro della semicirc. calcolato qualche lezione fa.



2° modo : uso direttamente la formula

$$\text{Area sup} = 2\pi \int_{\gamma} y \, ds$$

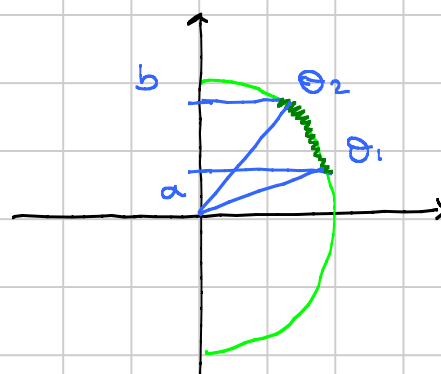
$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (r \cos t, r \sin t) \\ t &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \, dt$$

$$= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 4\pi r^2$$

Esempio 5 Segmento sferico

Posso usare la stessa formula con diversi estremi di integrazione



$$\text{Area sup} = 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos t \, dt$$

$$= 2\pi r^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$b = r \sin \theta_2, \quad a = r \sin \theta_1$$

$$= 2\pi r (b - a)$$

— o — o —

INTEGRALI SUPERFICIALI

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

integrale superficiale

$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

funzione di 3 variabili definita almeno sul sostegno della sup.

Idea della definizione

- Partizione Ω come nella def. di area $\sim$ rettangoli R_i
- fisso punti (u_i, v_i) in ogni R_i
- considero il parallelogrammo P_i trasformato di R_i
- considero la somma di Riemann

$$\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) f(\phi(u_i, v_i))$$

- raffinisco la suddivisione mandando a 0 il lato dei rettangoli.

Al limite ottengo

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \int_{\Omega} f(\phi(u, v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

Integrale di flusso Dato un campo di vettori

$$E(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \text{flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \sigma$$

$\vec{n}$
VERSORE normale alla superficie

Ora $\vec{m} = (M_1, M_2, M_3)$ diviso la sua norma che va a semplificare la radice.

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

— o — o —

Esempio Integrale superficiale su una sfera

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$$

... conto di $J\Phi$... $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = r^2 \cos \varphi$

Quindi

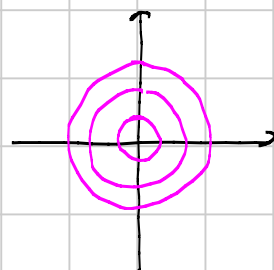
$$\int_{\text{sfera}} f(x, y, z) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi f(x, y, z) \overset{\text{fisso}}{\uparrow} \underbrace{r^2 \cos \varphi}_{\substack{\text{sostituisco} \\ \text{coord. sferiche}}}$$

— o — o —

Finestra sul futuro: formule di coarea

Coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta f(p \cos \theta, p \sin \theta) \cdot p \\ &= \int_0^{+\infty} dp \int_{\gamma_p} f(x, y) ds \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{circ. di raggio } p \end{aligned}$$

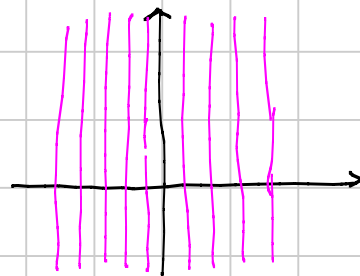


Coord. sferiche

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \dots = \int_0^{+\infty} dp \int_{S_p} f(x, y, z) d\sigma$$

Fubini-Tonelli

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}_x} dy f(x, y)$$



Esercizio Provare a scrivere e vedere se funzionano
dei Fubini-Tonelli

- quadrati
- rettangoli
- parabole

