

Ambientazione : superficie $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

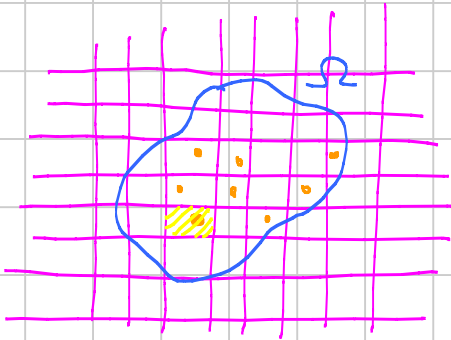
$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

↑ ↑ ↑
componenti

AREA DI UNA SUPERFICIE

① Come non si definisce ? Con le triangolazioni no effetto fisarmonica dell'esempio di Schwarz

② Come si definisce ? Approssimando con pezzi di piano tangente.



→ suddivido Ω in rettangolini $R_1, \dots, R_n$ (sono quelli che toccano Ω)

→ scelgo un punto (u_i, v_i) in ogni rettangolo R_i

→ su ogni rettangolo R_i approssimo la superficie, cioè la funzione Φ , con il suo sviluppo di Taylor di ordine 1, che è una mappa affine. nel punto (u_i, v_i)

→ considero l'immagine di R_i mediante la mappa affine appena considerata. L'immagine di R_i è un parallelogrammo contenuto nel piano tg. alla sup nel p.to $\Phi(u_i, v_i)$

→ Brutalmente, sto "piastrellando" la superficie con dei parallelogrammi contenuti in piani tangenti.

→ Considero la somma delle aree dei parall. come una approx. dell'area della sup.

→ Infittisco la suddivisione e passo al limite.

Domanda: quanto vale l'area di ognuno dei parallelogrammi?

Domanda più generale: data un'affinità

$$\varphi(x) = Ax + b$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

A matrice 3×2

come si trasformano le aree dei rettangoli?

risposta: vengono moltiplicate per $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$
dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori 2×2 della matrice A.



piano



spazio

Nel vostro caso $A = J\phi(u_i, v_i)$, quindi

$$\begin{aligned} \text{somma aree} \\ \text{parallelogrammi} &= \sum_{i=1}^k \text{Area}(R_i) \underbrace{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}_{\text{calcolato in } (u_i, v_i)} \end{aligned}$$

Questa è una somma di Riemann per l'integrale

$$\int_{\Omega} \sqrt{M_1^2(u, v) + M_2^2(u, v) + M_3^2(u, v)} \, du \, dv$$

dove

$$J\phi = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\phi_u \quad \phi_v$

$$M_1 = (Y_u Z_v - Y_v Z_u)$$

$$M_2 = (-X_u Z_v + X_v Z_u)$$

$$M_3 = (X_u Y_v - X_v Y_u)$$

Conclusione!

$$\text{area superficie} = \int_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

Altri modi di scrivere l'integrandola

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \|\phi_u \wedge \phi_v\|^2$$

$$\phi_u \wedge \phi_v = (M_1, M_2, M_3)$$

$$= \|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2 - \langle \phi_u, \phi_v \rangle^2$$

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} \|\phi_u\|^2 & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_u, \phi_v \rangle & \|\phi_v\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Det} (J\phi)^t J\phi$$

— 0 — 0 —

Superfici equivalenti a meno di riparametrizzazione

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$$

$$\hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\uparrow$
diffeomorfismo

Posso costruire una nuova superficie

$$\hat{\phi}: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\hat{\phi}(u, v) = \phi(\varphi(u, v))$$

$$\hat{\phi} = \phi \circ \varphi$$

Proposizione

$$\text{Area}(\hat{\phi}) = \text{Area}(\phi).$$

Dim. Uso l'ultima caratterizzazione di $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$.

$$\text{Area}(\hat{\phi}) = \int_{\hat{\Omega}} \sqrt{\text{Det} (J\hat{\phi})^t (J\hat{\phi})} \, du \, dv = (\star)$$

osservo che $J\hat{\phi} = J\phi \cdot J\varphi$, quindi

$$(J\hat{\phi})^t J\hat{\phi} = J\varphi^t J\phi^t J\phi J\varphi$$

$$\text{Det} (J\hat{\phi})^t J\hat{\phi} = \text{Det} (J\phi)^t J\phi (\text{Det} J\varphi)^2$$

Quindi

$$(\star) = \int_{\hat{\Omega}} |\text{Det} J\varphi| \sqrt{\text{Det} (J\phi)^t (J\phi)} \, du \, dv$$

$\uparrow$ calcolato in $\varphi(u,v)$

$$= \int \sqrt{\text{Det} (J\phi)^t (J\phi)} \, du \, dv$$

$\uparrow \varphi(\hat{\Omega}) = \Omega$ $\uparrow$ calcolato in (u,v)

cambio di variabili negli
integrali doppi

$$= \text{Area}(\phi).$$

— o — o —

Caso speciale 1 Superficie cartesiana $(u, v, \varphi(u,v))$

$$J\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = \phi_u \wedge \phi_v$$

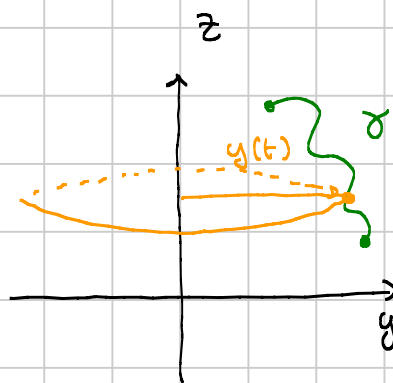
$$= (-\varphi_u, -\varphi_v, 1)$$

Quindi

$$\text{Area sup. cartesiana} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$

Caso speciale 2 Superficie di rotazione

Considero una curva a valori nel piano yz



$$\gamma(t) = (y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$$

Ruotando intorno all'asse z la curva genera una sup. parametrizzata da

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) \quad \begin{array}{l} t \in [a, b] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$$J_{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & -y(t) \sin \theta \\ \dot{y}(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta \\ \dot{z}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-y \dot{z} \cos \theta, y \dot{z} \sin \theta, y \dot{y})$$

$$\text{Area superficie} = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{y^2 \dot{z}^2 + y^2 \dot{y}^2}$$

$$= 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt$$