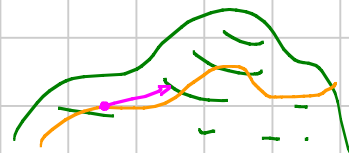


Prop. Se una curva è contenuta in una superficie, allora in ogni punto della curva la retta tangente alla curva è contenuta nel piano tangente alla super. in quel punto

Dim. Indichiamo la superficie con

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in \Omega$$



Una curva a valori nella superficie la possiamo pensare ottenuta a partire da una curva $(u(t), v(t)) \quad t \in [a,b]$ a valori in Ω .

In questo modo la curva si ottiene per composiz.

$$\gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \quad t \in [a,b]$$

$$[a,b] \ni t \xrightarrow{(u,v)} \underset{\Omega}{(u(t), v(t))} \xrightarrow{\Phi} \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$$

Fisso un $t_0 \in [a,b]$. La retta tangente alla curva ha equazione parametrica

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0) \quad t \in \mathbb{R}$$

Ora $\dot{\gamma}(t_0)$ si calcola con la chain rule e viene

$$\dot{\gamma} = (x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, z_u \dot{u} + z_v \dot{v})$$

$$= \dot{u} (x_u, y_u, z_u) + \dot{v} (x_v, y_v, z_v) = \dot{u} \phi_u + \dot{v} \phi_v$$

Quindi δ è comb. lineare di Φ_u e Φ_v , quindi sta nella giacitura del piano tangente alla sup. nel pto $\delta(t_0)$.

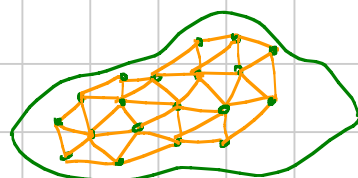
— o — o —

AREA DI UNA SUPERFICIE

Per le curve: so fare la lung. dei segmenti, e a partire da quella approssimo la curva con le poligonali e definisco la lung. di una curva per approx come sup. delle lung. delle poligonali.

Per le superfici: vorrei approssimare con dei triangoli di cui so fare l'area e fare il sup delle "triangolazioni".

Come non si definisce l'area?
Con il sup dei triangolini !!!



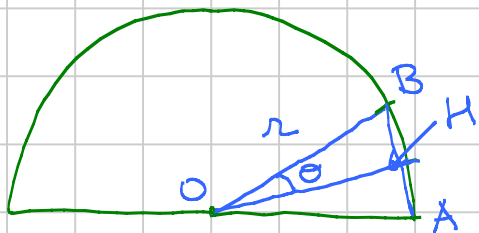
Motivo: il sup viene praticamente sempre $+\infty$.

Esempio di Schwarz

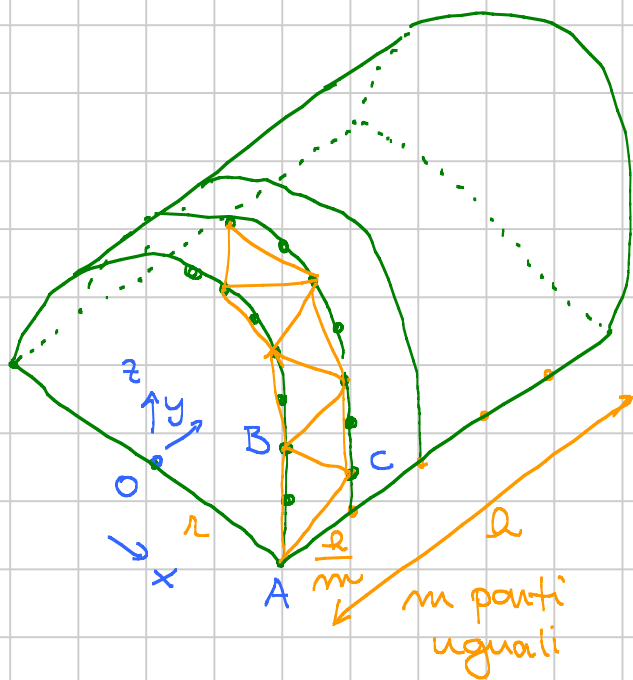
Divido l'altezza in m parti
Divido la semicirca in $2n$ parti

Calcoliamo l'area di ogni triangolo.

$$\text{Base} = AB = 2r \sin \theta = 2r \sin \frac{\pi}{2m}$$



Altezza del triangolo = lunghezza di CH
con il p.to medio della base



Scriviamo le coordinate di C e H

$$C = \left(r \cos \frac{\pi}{2n}, \frac{R}{m}, r \sin \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$H = (OH \cos \theta, 0, OH \sin \theta) = (r \cos \theta \cos \theta, 0, r \cos \theta \sin \theta) \\ = \left(r \cos^2 \frac{\pi}{2m}, 0, r \sin \frac{\pi}{2m} \cos \frac{\pi}{2m} \right)$$

Ma allora, posto $\theta = \frac{\pi}{2m}$,

$$CH^2 = (r \cos \theta - r \cos^2 \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2} + (r \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta)^2 \\ = r^2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2} + r^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta)^2$$

$$CH^2 = r^2 (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2}$$

L'area di ogni triangolo è

$$\text{Area} = \frac{1}{2} 2r \sin \theta \sqrt{r^2 (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2}}$$

Quanti sono i triangoli? Considerando tutto il cilindro (sopra e sotto) sono $4n$ in ogni fascia, quindi in totale $4nm$.

Quindi alla fine l'area totale è

$$\text{Area tot} = 4nm r \sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2m}\right)^2 + \frac{R^2}{m^2}}$$

Facciamo il limite prendendo $m = n$

Sviluppando al 1° ordine diventa

$$\sim \cancel{4}^2 n \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{2} \frac{\pi}{\cancel{2n}} \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\cancel{2n}} \right)^2 \right)^2 + \frac{a^2}{\cancel{n^2}}} \rightarrow 2\pi R$$

"sup. che ci aspettiamo"

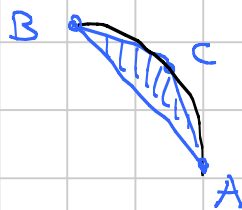
Oss. Otteniamo lo stesso limite prendendo $m = n^\alpha$ con $\alpha < 2$ o più in generale $m = o(n^2)$

Se prendo invece $m = n^3$

$$\sim \cancel{4}^2 n \cdot \textcircled{n^3} \cdot \cancel{2} \frac{\pi}{\cancel{2n}} \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\cancel{2n}} \right)^2 \right)^2 + \frac{a^2}{\cancel{n^6}}} \rightarrow +\infty$$

Morale: a seconda di come faccio i triangoli, il limite cambia! Posso anche farlo venire $2015\pi R$ pur di scegliere $m = \alpha n^2$ con α opportuno.

Quando $m \rightarrow \infty$ molto più velocemente di n c'è un "effetto fisarmonica" per cui le aree dei singoli triangoli non tendono a zero.



Detto meglio matematicamente:

- se in una curva prendo una subdiv. molto fitta, i segmenti approssimano le rette tangenti
- in una sup. i triangolini, anche se diventano piccoli, possono non approssimare il piano tangente.

