

SUPERFICI (Superfici 2-dim. in $\mathbb{R}^3$)

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (connesso, compatto, chiusura di un aperto, misur.)

Una superficie è una applicazione $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

Ipotesi classiche: $\rightarrow \Phi$ iniettiva in $\text{Int}(\Omega)$

$\rightarrow \Phi$ differenziabile in Ω

$\rightarrow J\Phi$ abbia rango 2 in ogni p.to di $\text{Int}(\Omega)$

Si definisce supporto della superficie l'immagine di Φ

SUPERFICI CARTESIANE "pezzi di grafico di funzioni"

Data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la superficie cartesiana è $z = f(x, y)$.

Il suo supporto è

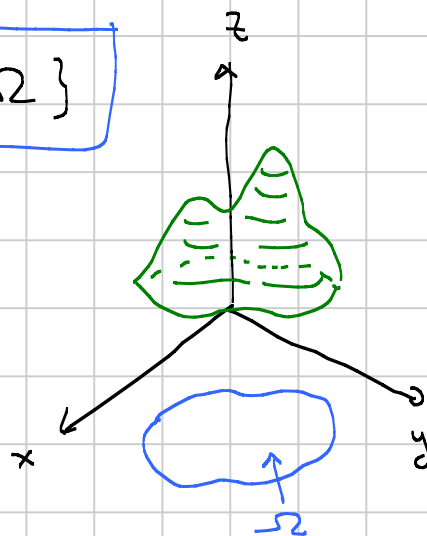
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$$

Una sua possibile parametrizzazione è

$$\Phi(u, v) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in \Omega\}$$

Notazione Indicheremo una superficie come

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



Esempio 1

$$\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

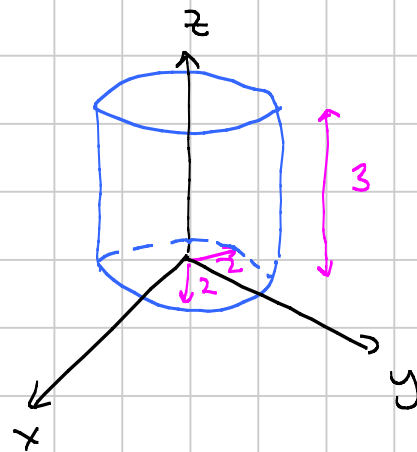
Superficie di paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

Esempio 2

Cilindro con asse lungo
asse z

raggio di base = 2

altezza = 3



$$(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z) \quad (\theta, z) \in \Omega$$

$$\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

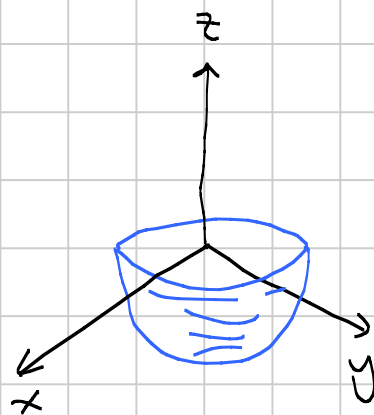
Nota bene: la parametrizzazione è suriettiva in $\text{Int}(\Omega)$,
ma non ovunque.

$$J = \begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede che $\text{rang}(J) = 2$ ovunque.

Esempio 3

Semisfera "sotto" con centro
in $(0, 0, 0)$ e raggio 2



Una parametrizzazione è (cartesiana)

$$\phi(u, v) = (u, v, -\sqrt{4 - u^2 - v^2}) \quad \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}$$

Un'altra parametrizzazione (in coord. sferiche) è

$$\phi(\theta, \varphi) = (2 \cos \varphi \cos \theta, 2 \cos \varphi \sin \theta, 2 \sin \varphi) \quad \text{con} \\ \Omega = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

PIANO TANGENTE E VETTORE NORMALE

Vettore normale = vettore perpendicolare al piano tangente

Nel caso cartesiano il piano tangente ha equazione

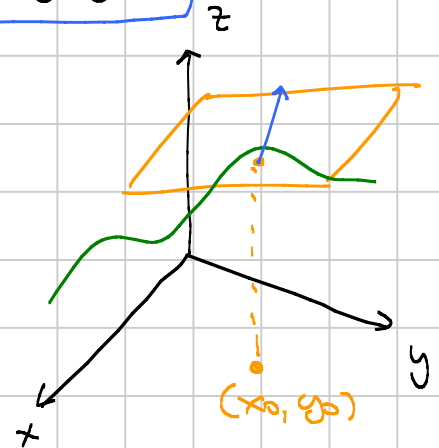
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Posso riscrivere il piano nella forma

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1(z - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0}) = 0$$

Vettore normale $\vec{n}$

$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) = \vec{n}$$



Nel caso generale l'equazione del piano tangente in forma parametrica è

$$(x, y, z) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) + t(x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) + s(x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$

In forma più breve

$$(x, y, z) = \phi(u_0, v_0) + t \phi_u(u_0, v_0) + s \phi_v(u_0, v_0)$$

cioè è il piano affine passante per il punto $\phi(u_0, v_0)$ e giacitura generata da $\phi_u(u_0, v_0)$ e $\phi_v(u_0, v_0)$, che sono linearmente indip. per ipotesi.

Brutalmente: l'equazione del piano tangente è il Taylor di ordine 1 della funzione vettoriale ϕ .

Per ottenere un vettore normale devo trovare un vettore perpendicolare a ϕ_u e ϕ_v . Questo si ottiene con la formula per il "prodotto vettore".

Formula misteriosa Dati due vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) si ottiene un vettore $\perp$ ad entrambi calcolando i 3 determinanti

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (b_1 c_2 - c_1 b_2, -a_1 c_2 + c_1 a_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Il vettore prodotto da questa formula, se i primi 2 sono lin. indip., è tale che i 3 vettori nell'ordine costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la base canonica cioè la matrice di passaggio ha det. positivo

Esempio

$$\begin{array}{lll} (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 0, 1) \\ (0, 1, 0) & (0, 0, 1) & (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) & (1, 0, 0) & (0, 0, 1) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Det } 1 \\ \text{stessa orient.} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -1 \Rightarrow \text{orientazione opposta}$$

Chi è il vettore normale?

Devo applicare la formula con ϕ_u e ϕ_v

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

VETTORE NORMALE "CANONICO"

Indichiamo con M_1, M_2, M_3 le componenti di questo vettore. Allora

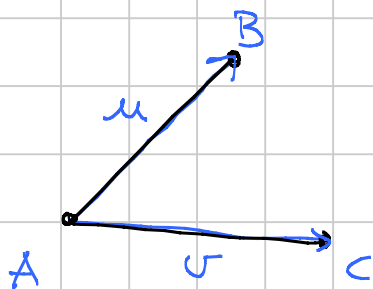
$$\|(M_1, M_2, M_3)\|^2 \neq 0 \text{ se il rango di } J\phi \text{ è due}$$

$$= \|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2 - \langle \phi_u, \phi_v \rangle^2$$

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} \|\phi_u\|^2 & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_u, \phi_v \rangle & \|\phi_v\|^2 \end{pmatrix}$$

Dim Fare il contaccio.

Interpretazione geometrica: dati 3 punti nello spazio, come calcolo l'area del Δ di cui sono vertici?



Calcolo a partire da u e v il vettore normale $\vec{n}$ con la formula misteriosa. Allora

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|\vec{n}\|^2$$