

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Caso semplice : $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$

$f: [a, b] \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$f(x, t)$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x, t) dx \quad (\text{integrale dipendente da un parametro})$$

Più in generale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, compatto, misurabile

$f: \Omega \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$f(x, t)$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} f(x, t) dx \quad \uparrow \text{ in } n \text{ variabili}$$

Domande: $\varphi(t)$ è continua? È derivabile?

Teorema 1

Avevamo assunto $f(x, t)$ continua, la funzione $\varphi(t)$ risulta continua in $[t_1, t_2]$.

Dim. Direttamente nel caso generale (in $\mathbb{R}^n$). Fisso $t_0 \in [t_1, t_2]$ e fisso $\varepsilon > 0$. La funzione $f(x, t)$ è continua, dunque unif. cont. su $\Omega \times [t_1, t_2]$, dunque esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|(x_1, s_1) - (x_2, s_2)| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1, s_1) - f(x_2, s_2)| \leq \varepsilon$$

Preso un qualunque $t \in [t_1, t_2]$ con $|t - t_0| \leq \delta$ avremo pertanto

$$\begin{aligned}
|\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \int_{\Omega} [f(t, x) - f(t_0, x)] dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \\
&\quad \text{distanza meno di } \delta \\
&\leq \int_{\Omega} \varepsilon dx = \varepsilon \text{meas}(\Omega)
\end{aligned}$$

Questo mostra la continuità. $\square$

Oss. Non abbiamo usato l'unif. cont. nelle 2 variabili, ma solo l'uniforme uniforme continuità (doppio avverbio) nella variabile t , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |s_2 - s_1| \leq \delta \Rightarrow |f(s_2, x) - f(s_1, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$$

Non abbiamo nemmeno usato la continuità rispetto ad x .
Per esempio il teorema vale se



$$f(x, t) = \begin{cases} d_1(t) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ d_2(t) & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Se $d_1(t)$ e $d_2(t)$ sono continue, allora l'integrale dipendente da parametro è continuo.

Teorema 2 Supponiamo $f: \Omega \times [t_1, t_2]$ sia continua (in (x, t)) e derivabile parzialmente rispetto a t con $f_t(x, t)$ continua in $\Omega \times [t_1, t_2]$.

Allora φ è derivabile in $[t_1, t_2]$ e

$$\varphi'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

(Brutalmente:
porto dentro la
derivata)

Dcm. Faccio il rapporto incrementale e passo al limite sfruttando l'unif. cont. di $f_t(x, t)$.

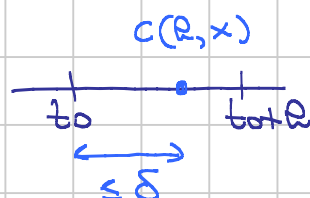
Fisso $t_0 \in [t_1, t_2]$, fisso $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} = \int_{\Omega} f_t(x, t_0) dx \quad \text{e voglio dim. che tende a 0 per } h \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{h} \left[\int_{\Omega} f(x, t_0+h) dx - \int_{\Omega} f(x, t_0) dx \right] - \int_{\Omega} f_t(x, t_0) dx$$

$$= \int_{\Omega} \left[\underbrace{\frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h}}_{\text{Lagrange in } t} - f_t(x, t_0) \right] dx$$

$$= \int_{\Omega} \left[f_t(x, t_0 + c(h, x)) - f_t(x, t_0) \right] dx$$



Questo in valore assoluto è $\leq \varepsilon$ se h è sufficientemente piccolo (basta che h sia + piccolo del δ dell'unif. cont. di f_t)

La conclusione è come prima.

Caso speciale In una variabile

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t) dx \quad \text{se } f_t \text{ esiste ed è continua.}$$

Più in generale in una variabile considero la funzione

$$F(a, b, t) := \int_a^b f(x, t) dx$$

Chi sono le derivate parziali di F rispetto ad a, b, t ?

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_a^b f_t(x, t) dx \quad (\text{fatto prima})$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a, b, t) = f(b, t) \quad (\text{Analisi 1})$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a, b, t) = -f(a, t) \quad (\text{Analisi 1})$$

↑
estremo "sotto"

Conseguenza:

$$\varphi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Funzione dentro variabile
Estremi variabili

Allora (posto che $a'(t)$, $b'(t)$ e $f_t(x, t)$ esistano continue

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t)$$

Dim. Basta osservare che $\varphi(t) = F(a(t), b(t), t)$
e applicare la CHAIN RULE:

$$\varphi'(t) = F_a a' + F_b b' + F_t$$

e sostituire F_a , F_b e F_t calcolati sopra.

— o — o —

TEOREMA 1 Una forma diff. chiusa in un aperto stellato è esatta, cioè ammette primitiva

Dim. Per semplicità la facciamo in 2 variabili.

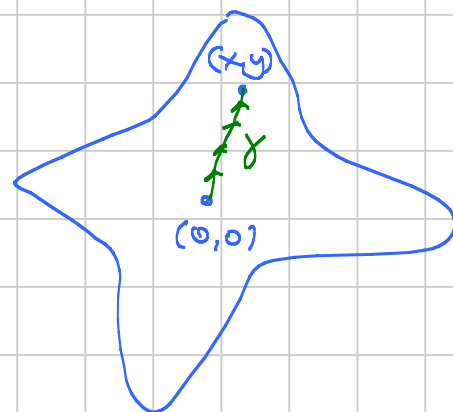
$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

con A e B di classe C^1 in Ω stellato con $A_y = B_x$.
A meno di traslazioni posso supporre Ω stellato rispetto a $(0,0)$

Pongo

$$F(x,y) := \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è la "direzissima" che unisce $(0,0)$ e (x,y) , cioè



$$\gamma(t) = (\underbrace{x_t}_{\uparrow x'(t)}, \underbrace{y_t}_{\uparrow y'(t)}) \quad t \in [0,1]$$

$$\text{Allora } F(x,y) = \int_0^1 [\underbrace{A(x_t, y_t)}_{\uparrow A(x(t), y(t))} \underbrace{x_t}_{\uparrow x'(t)} + \underbrace{B(x_t, y_t)}_{\uparrow B(x(t), y(t))} \underbrace{y_t}_{\uparrow y'(t)}] dt$$

Devo verificare che $F_x = A$ e $F_y = B$.

$$F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \dots \quad (\text{derivata di un integrale dipendente da parametro, con } x \text{ parametro e } t \text{ variabile di integrazione})$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [A(x_t, y_t) x_t + B(x_t, y_t) y_t] dt$$

$$= \int_0^1 [A_x(x_t, y_t) t x + A(x_t, y_t) \cdot 1 + B_x(x_t, y_t) t y] dt$$

NIENTE PANICO : l' integranda è una derivata rispetto a t ...

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{chiusura}}}{\int_0^1} [A_x(xt, yt)tx + A(xt, yt) + A_y(xt, yt)ty] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t A(xt, yt)] dt \quad (\text{verificare mentalmente che torna!})$$

$$= [t A(xt, yt)]_{t=0}^{t=1} = A(x, y)$$

La verifica che $F_y = B$ è del tutto analoga . $\square$
 $\circ$ $\circ$