

Teorema fondamentale Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE.

Sia ω una forma diff. di classe C^1 in Ω CHIUSA.

Sia γ_1 e γ_2 due curve C^1 a tratti OMOTOPE, con gli stessi estremi.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Questo teorema implica l'esattezza delle forme chiuse sugli aperti sempl. connessi.

Dim. dell'implicazione Per avere l'esattezza basta mostrare che

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \quad \text{per ogni } \gamma \text{ chiusa a valori in } \Omega$$

Poiché Ω è sempl. connesso ogni curva γ chiusa èomotopa ad una curva γ_0 costante e per il teorema fondamentale

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = 0$$

↑
teo. fond.

↑ banalità: ogni forma ha integrale nullo sulle curve costanti.

— 0 — 0 —

ESEMPIO DI FORMA CHIUSA MA NON ESATTA

LA SOLITA

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \text{non sempl. connesso}$$

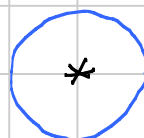
È CHIUSA?

$$A_y = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{😊}$$

È ESATTA? NO: basta trovare una curva chiusa su cui l'integrale viene $\neq 0$.

Provo con $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} [A(\cos t, \sin t) (-\sin t) + B(\cos t, \sin t) \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. La solita annuette primitiva in tutti questi insiemi, che sono stellati ($\Rightarrow$ sempl. connessi)

• $\{x > 0\}$, $\{y > 0\}$, $\{x < 0\}$, $\{y < 0\}$

• $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$



Una primitiva per $x > 0$ è $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

$$F_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2+y^2} ; \quad F_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

È anche primitiva per $x < 0$.

Una primitiva per $y \neq 0$ è $F_2(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$

Fare il conto per esercizio.

Nota bene: nel primo quadrante $F(x, y)$ e $F_2(x, y)$ sono primitive della stessa forma, dunque DEVONO differire per una costante. Ed infatti

$$F(x, y) - F_2(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}$$

Recorso: $\arctan a + \arctan \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \forall a > 0$

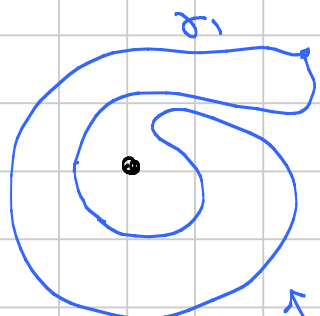
Se pongo

$$F_3(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{se } x > 0 \\ F_2(x, y) + \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

ho ottenuto una primitiva definita nel 1°, 2° e 4° quadrante. Procedendo allo stesso modo posso estenderla su $\mathbb{R}^2 \setminus$ semiasse neg. delle x .

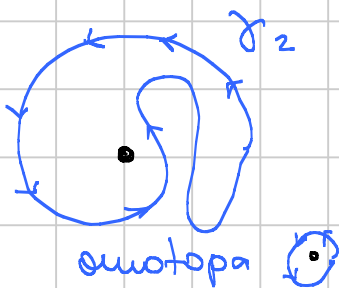
Questa primitiva coincide a meno di costanti con quella definita per $y < 0$, ma le costanti sul 3° e 4° quadrante sono diverse.

Esempio ω = la solita. Quanto fa l'integrale sulle curve disegnate qui sotto

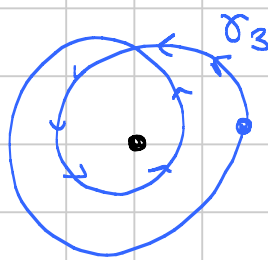


$$\int_{\sigma_1} \omega = 0$$

omotopa costante



$$\int_{\sigma_2} \omega = \pi$$



$$\int_{\sigma_3} \omega = 4\pi$$

2 giri



$$\int_{\sigma_4} \omega = -2\pi$$

Fatto generale Ho una forma ω chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Come faccio a sapere se è esatta?

La testo su una curva che fa un giro intorno al buco, ad esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

- Se viene $\neq 0$, allora esattezza
- Se viene $= 0$, allora verrà 0 su ogni altra curva, perché ogni altra curva è omotopa a un multiplo di quella, quindi la forma è esatta.

Oss generale Dato una forma chiusa ω in un $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto qualunque, per avere l'esattezza basta testare su una famiglia di curve che generano il gruppo fondamentale.

Perché la solita è la solita? Sia ω_s la solita
Sia ω un'altra forma chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Allora esiste una costante c tale che

$$\omega + c\omega_s \quad \text{è esatta}$$

quindi in particolare $\omega = -c\omega_s + \text{forma esatta}$

Dim. Basta trovare c in maniera tale che

$$\int_{\gamma} \omega + c\omega_s = 0$$

dove γ è la solita circ. che fa un giro intorno al buco

$$0 = \int_{\gamma} \omega + c\omega_s = \int_{\gamma} \omega + c \int_{\gamma} \omega_s \quad \leadsto \text{trovo } c.$$

" calcolo " 2π

□

Oss. Tutte le forme chiuse e non esatte su $\mathbb{R}^2 \setminus 2 \text{pti}$ sono del tipo

$$\text{esatta} + a \omega_S + b \omega_{S'}$$

solite traslate in maniera
da avere problemi nei 2pti

Oss. In $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$ tutte le forme chiuse ma non esatte sono del tipo

$$\text{esatta} + a \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + 0 dz \right)$$

(se la retta è l'asse z)

