

FORME DIFF. CHIUSE

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$$

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^1 .

Si dice che ω è chiusa se

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad \text{per ogni } i, k = 1, \dots, n$$

Casi speciali $n=2$ $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$

$$\text{chiusa} \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

$n=3$ $\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$

$$\text{chiusa} \Leftrightarrow A_y = B_x, \quad A_z = C_x, \quad B_z = C_y$$

Oss. Per una forma in n variabili le condizioni sono $\binom{n}{2}$

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^1 .

Allora vale l'implicazione

$$\omega \text{ esatta} \Rightarrow \omega \text{ chiusa}$$

Conseguenza al contrario Se ω non è chiusa, allora non è nemmeno esatta.

Dim. Essendo la forma esatta si ha che

$$A_k(x) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$$

per una opportuna primitiva $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ma allora

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$$
$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \dots = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}$$

coincidono per il
teo. di scambio
dell'ordine di deriv.

— o — o —

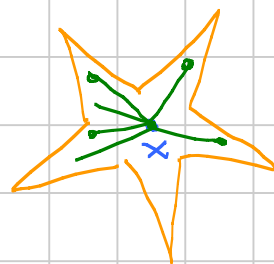
Def. Un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- **CONVESSO** se $\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1]$ si ha che

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$$

- **STELLATO** (star shaped) se

$$\exists x \in \Omega \forall y \in \Omega \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$$



- **CONNESSO** se non lo posso scrivere come unione disgiunta di due aperti non banali, cioè

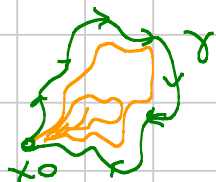
$$A \text{ aperto}, B \text{ aperto} \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega \Rightarrow A = \emptyset$$

Oss. Per aperti di $\mathbb{R}^n$ la connessione è equivalente alla connessione per archi, cioè per ogni $x \in \Omega$ e ogni $y \in \Omega$ esiste $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ t.c. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.
+ continua

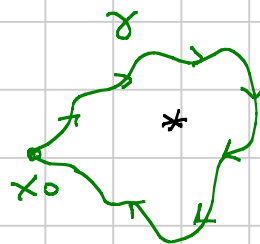
È equivalente anche alla connessione per archi di classe C^∞ .

• SEMPLICE MENTE CONNESSO

Ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante



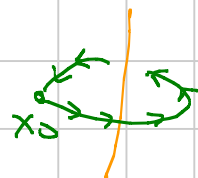
Posso ritrarre una curva su un pto in $\mathbb{R}^2$



In $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ non posso ritrarre una curva che "gira intorno al buco"

Brutalmente: Ω è semplicemente connesso se non ha buchi capaci di fermare la retrazione di una curva.

Esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{p.to}\}$ è semplicemente connesso
 $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$ NON è sempl. connesso

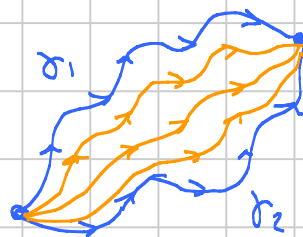


Def. più formale di omotopia.

Siano $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2: [a,b] \rightarrow \Omega$ due curve continue con gli stessi estremi $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$
 $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Si dice che le curve sono omotope mediante una omotopia che lascia gli estremi fissi se esiste

$$\Phi: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$$



tale che (i) Φ è continua

(ii) $\Phi(t,0) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [a,b]$

(iii) $\Phi(t,1) = \gamma_2(t)$ " " "

(iv) $\Phi(a,s) = \gamma_1(a)$ per ogni $s \in [0,1]$

(v) $\Phi(b,s) = \gamma_1(b)$ " " "

FATTO GENERALE Ω è sempl. connesso se e solo se per ogni coppia di curve continue con gli stessi estremi esiste un'omotopia tra l'una e l'altra.

Teorema misterioso Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto QUALUNQUE e date due curve γ_1 e γ_2 di classe C^1 con gli stessi estremi e omotope tra di loro, allora esiste un'omotopia non solo C^0 , ma C^1 e oltre, cioè t.c.

$\Phi_t, \Phi_s, \Phi_{ts}$ sono continue
— o — o —

Oss. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora

NI: solo se si definisce
sui connessi

connesso $\Rightarrow$ stellato $\Rightarrow$ sempl. connesso $\Rightarrow$ connesso

Non vale nessuna delle implicazioni inverse (fare disegni in $\mathbb{R}^2$)

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto SEMPL. CONNESSO.
Sia ω una forma diff. di classe C^1 in Ω .
Allora

ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

Achtung! Se ω è chiusa, ma Ω non è sempl. connesso, allora BOH, cioè può essere esatta oppure no.

Esempio banale $\omega =$ la forma nulla $0 dx + 0 dy$
 $\Omega =$ corona circolare in $\mathbb{R}^2$

Banalmente è esatta e chiusa

Esempio meno banale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \leftarrow \text{Non è simply connected}$$

Dico che ω è CHIUSA

$$A_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = B_x$$

Dico che è ESATTA vedendo ad occhio la primitiva:

$$F(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$$

(verifica diretta).

— o —