

Cosa succede se riparametrizzo la curva

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ω forma diff. in Ω , $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ curva C^1
Sia ora

$$\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

Possiamo definire una nuova curva $\gamma_1: [c, d] \rightarrow \Omega$ come

$$\gamma_1(t) := \gamma(\varphi(t))$$

Qual è la relazione tra $\int_{\gamma} \omega$ e $\int_{\gamma_1} \omega$?

Basta usare la formula

$$\int_c^d \left[\sum_{i=1}^n A_i(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_{1i}(t) \right] dt \quad \text{ora}$$

$$\dot{\gamma}_{1i}(t) = \frac{d}{dt} (\gamma_i(\varphi(t))) = \dot{\gamma}_i(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

Quindi l'integrale diventa

$$\int_c^d \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(\varphi(t))) \dot{\gamma}_i(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\begin{aligned} s &= \varphi(t) \\ ds &= \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_i(s) ds$$

Gli estremi di integrazione sono a e b se $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$
sono b e a se $\varphi(c)=b$ e $\varphi(d)=a$

quindi può cambiare il segno.

Conclusione

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega \quad \text{se } \gamma \text{ conserva i versi } (\gamma(c)=a, \gamma(d)=b)$$
$$= - \int_{\gamma_1} \omega \quad \text{se } \gamma \text{ inverte i versi } (\gamma(c)=b, \gamma(d)=a)$$

Quindi

- per l'integrale curvilineo se inverte il verso, il segno resta lo stesso. Inoltre tratti ripetuti avanti/indietro si sommano,
- per l'integrale di una forma se inverte il verso, il segno cambia. Inoltre i tratti ripetuti avanti/indietro si cancellano.

— o — o —

FORME DIFF. ESATTE

CAMPI CONSERVATIVI

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia ω una forma differ. in Ω di classe C^0 .

Si dice che ω è esatta in Ω se esiste una funzione $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$A_k(x) = \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Quando succede, la funzione $V(x)$ si dice PRIMITIVA della forma o POTENZIALE.

Oss. 1 Bisogna sempre precisare DOVE una forma è esatta, cioè la stessa forma può essere esatta in un insieme, ma non in un altro. Ancora peggio: una forma può essere esatta in Ω_1 e in Ω_2 , ma non in $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Oss. La differenza tra due primitive di una stessa forma ω (posto che esistano) è una funzione con gradiente nullo ovunque, quindi è costante sulle componenti connesse di Ω .

Proposizione 1 Sia ω una forma diff. esatta in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
 Sia F una primitiva di ω
 Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti.

Allora

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Diff. tra i valori della primitiva agli estremi

Dim. Fare il conto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right] dt \\ &\stackrel{\omega \text{ esatta}}{=} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right] dt \\ &\stackrel{\text{chain rule}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt \stackrel{\text{integrale di una derivata}}{=} \left[F(\gamma(t)) \right]_{t=a}^{t=b} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Questo funziona se γ è di classe C^1 . Se è solo C^1 a tratti si fa lo stesso discorso tratto per tratto e tutti i termini intermedi si eliminano telescopicamente.

— o — o —

Oss. Per $m=2$ la dimostrazione diventa

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\&= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right] dt \\&= \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) dt = \text{come sopra} \\&\quad \text{--- o --- o ---}\end{aligned}$$

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^p .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

- (i) ω è esatta
- (ii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi vale l'uguaglianza

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(iii) per ogni curva γ CHIUSA vale

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Corollario ciclistico

Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, allora di sicuro il vento non è gradiente di un potenziale

Dim $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vento}}}{\vec{E}}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt < 0$, quindi non si annulla se il vento è contrario

Dim. teorema (i) $\Rightarrow$ (ii) è la proposizione di prima

(i) $\Rightarrow$ (iii) pure

(ii) $\Rightarrow$ (iii) segue usando $\gamma_1(t) = \text{curva } \gamma(t) \text{ data}$

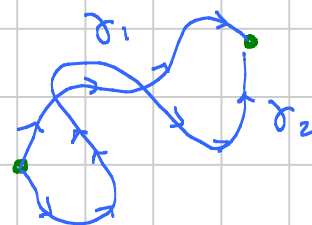
$\gamma_2(t) = \text{curva costante in } \gamma(a) = \gamma(b)$.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = 0$$

$\uparrow$ nella formula ho $\dot{\gamma}_2(t) \equiv 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Costruisco una nuova curva γ facendo prima avanti lungo γ_1 , poi indietro lungo γ_2 [scrive espressione formale]



$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

$\uparrow$ γ è chiusa

$\uparrow$ perché γ_2 è percorsa al contrario.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Devo definire la primitiva. Fisso un punto a caso $x_0 \in \Omega$. Per ogni altro $x \in \Omega$ definisco

$F(x) = \int_{\gamma} \omega$ dove γ è una qualunque curva che unisce x_0 a x (per l'ipotesi (ii) non dipende dalla curva). Sto supponendo che Ω sia connesso per curve C^1 a tratti (cosa che per gli aperti è equivalente alla connessione).

Devo dimostrare che

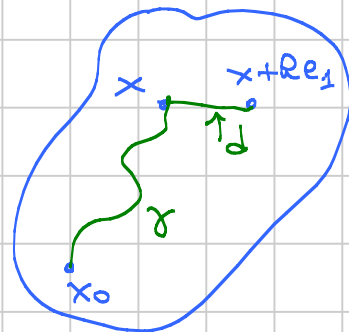
$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = A_k(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Facciamolo per x_1 .

$$F(x+Re_1) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta} \omega$$

$\uparrow$
 δ
 dirrettissima

$$F(x) = \int_{\gamma} \omega$$



$$\frac{F(x+Re_1) - F(x)}{R} = \frac{1}{R} \int_{\delta} \omega$$

$$d(t) = (x+te_1) \quad t \in [0, R]$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^R \sum_{i=1}^n A_i(x+te_1) \dot{d}_i(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^R A_1(x+te_1) dt$$

$\uparrow$
 sono tutti nulli
 tranne $\dot{d}_1(t) \equiv 1$

$\uparrow$
 $= A_1(x)$
 $\uparrow$
 Analisi 1

— o — o —