

FORME DIFFERENZIALI

Forme Diff. LINEARI
1-FORMEMultilineari
k-forme

Def. (stile corso di servizio) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.
Una forma diff. su Ω è un oggetto del tipo

$$\omega = \sum_{k=1}^m A_k(x) dx_k$$

dove $A_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $k = 1, \dots, m$.

Una forma ω si dice di classe C^m se tutte le $A_k(x)$ sono C^m .

Esempi $m=2$ $\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$

$m=3$ $\omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$

$$\omega = \underbrace{(x^2 + e^{xy})}_{A(x,y)} dx + \underbrace{(y \sin x)}_{B(x,y)} dy$$

Def. (Ufficiale) Una forma diff. su Ω è un'applicazione da Ω a valori nel duale di $\mathbb{R}^n$.

Oss. Possiamo pensare $dx_1, \dots, dx_n$ come la base canonica del duale di $\mathbb{R}^n$. In tal caso i coeff. $A_k(x)$ sono semplicemente le componenti della forma risp. a questa base.

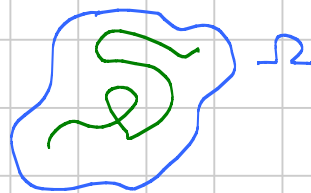
Oss. Considerando la funzione $\varphi_k(x) = x_k$, si ottiene che il suo diff. in ogni punto (che possiamo indicare con dx_k) è esattamente il k -esimo el. della base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$.

Integrale di una forma diff. lungo una curva

- ① Notazione
- ② Significato fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecnica di calcolo

1 Notazione

$$\int_{\gamma} \omega$$



Si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto, ω è una forma diff. definita su Ω , e $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ è una curva di classe C^1 a tratti.

Def. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice C^1 a tratti se esistono punti

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

taie che γ è C^1 in $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \dots, n$
e inoltre γ è C^0 in $[a, b]$



3-4 La definizione è la seguente

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt$$

→ avrebbe spezzato
nei vari intervalli
 $[t_{k-1}, t_k]$ per definire
bene $\dot{\gamma}_i(t)$.

Esempio per $n=2$ $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

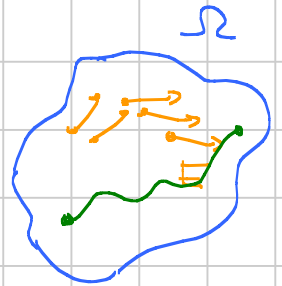
$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt$$

Oss. Nella definizione è come se brutalmente avessi fatto

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad \leadsto \quad dx = \dot{x}(t) dt \quad \leadsto \text{sostituzione fatta.}$$

[2] Significato fisico Per semplicità prendiamo $n=2$

Consideriamo l'applicazione $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da



$$E(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$

Pensiamola come "campo di vettori". La curva $\gamma(t)$ è la traiettoria di un punto che si muove.

Allora $\int_{\gamma} \omega$ rappresenta il lavoro della forza sul punto,

dove $\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$.

$$\text{Lavoro} = \underbrace{\text{forza}}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{\text{velocità}}_{\dot{\gamma}} \quad \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---}$$

INTEGRALE CURVILINEO VS INTEGRALE DI UNA FORMA

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) \dot{\gamma}_i(t) \right) dt$$

se $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\dot{\gamma}_i(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

L'ultima cosa scritta è l'integrale lungo la curva della funzione

prodotto scalare tra "campo" e vettore tangente

In 2 dimensioni diventa

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left[A(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Differenza tra una forma diff. in $\mathbb{R}^2$ e una coppia di funzioni in $\mathbb{R}^2$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. In Ω posso definire diversi oggetti

$$\text{Func}(\Omega) = \{ \text{funzioni } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$$

$$\text{Curve}(\Omega) = \{ \text{curve } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \}$$

$$\text{Diff}(\Omega) = \{ \text{forme diff. in } \Omega \}.$$

Supponiamo di avere due aperti $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Supponiamo di avere $\varphi: A \rightarrow B$, diciamo di classe C^1 .

La φ induce delle applicazioni a livello di Func, Curve, Diff.

$$\text{Func}(B) \ni g \xrightarrow{f_{\#}} g \circ \varphi \in \text{Func}(A)$$

$$\text{Curve}(A) \ni \gamma \xrightarrow{f_{\#}} \varphi \circ \gamma \in \text{Curve}(B)$$

Le forme diff. vanno indietro, cioè data ω su B e una curva γ su A , definisco una forma $f_{\#}\omega$ su A mediante la formula

$$\int_{\gamma} \underbrace{f^{\#} \omega}_{\substack{\text{forma de} \\ \text{raggio} \\ \text{trasformare} \\ \text{su A}}} = \int_{\underbrace{f^{\#} \gamma}_{\substack{\text{curva trasportata} \\ \text{su B}}}} \omega$$

def $\downarrow$

Se io definissi $f^{\#} \omega$ facendo il pull-back dei coefficienti A e B della forma ω , la relazione NON sarebbe soddisfatta. Quindi le forme tornano indietro, ma non come le funzioni.

Esercizio Capire come tornano indietro le forme, cioè data

$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$
definita su un certo aperto $B \subseteq \mathbb{R}^2$, trovare la formula per ω_1 tale che

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\varphi \circ \gamma} \omega$$

per ogni curva $\gamma: [a,b] \rightarrow A$.

Analogo di algebra lineare

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ v_1 & \xrightarrow{?} & w_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^*: W^* & \longrightarrow & V^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ w_1^* & \xrightarrow{?} & v_1 \end{array}$$

— o — o —