

CURVA DI LUNGHEZZA INFINITAEsempio fatto apposta

Scelgo i triangoli in maniera che abbiano altezza

$$R_n = \frac{1}{n}$$

In questo modo $f(x)$ è continua e la curva

$$\gamma(t) = (1-t, f(1-t))$$

ha lunghezza infinita ... uso come poligonale i vertici dei triangoli e tutti i lati obliqui hanno lunghezza $\geq \frac{1}{n}$.

Esempio meno fatto apposta

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

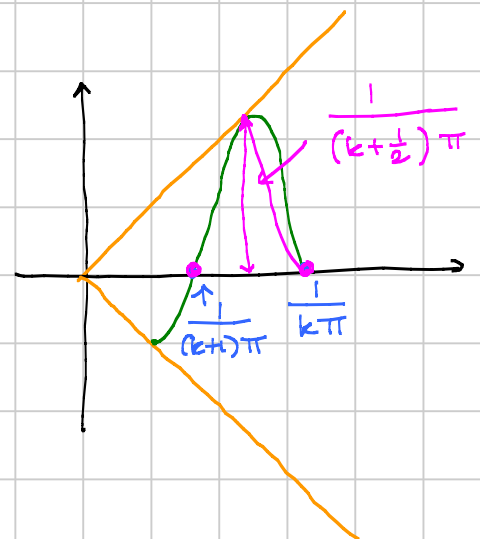
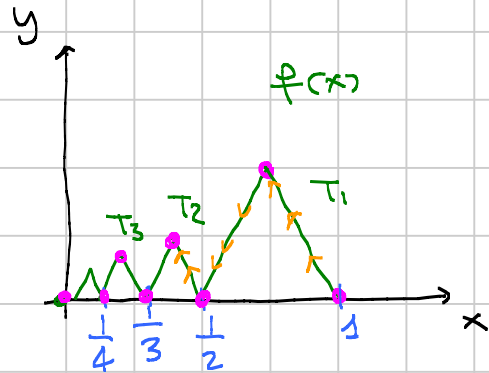
$\gamma(t) = (t, f(t))$ ha lungh. infinita

Penso come poligonale quella che passa per i p.ti in cui

$$\sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

Ancora una volta i lati sono $\sim \frac{1}{k}$

Esercizio Per ogni $\alpha < 1$ esiste curva α -Hölder di lungh. infinita



INTEGRALI CURVILINEI

- ① Notazione
- ② Significato geometrico
- ③ Idea della definizione
- ④ Tecnica di calcolo

1 NOTAZIONI

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

indica l'integrale
curvilineo

INTEGRALE DELLA FUNZIONE
 $f(x)$ LUNGO LA CURVA γ

Si intende che

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una curva

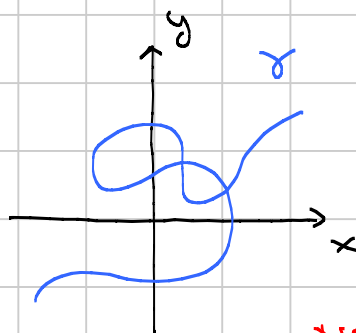
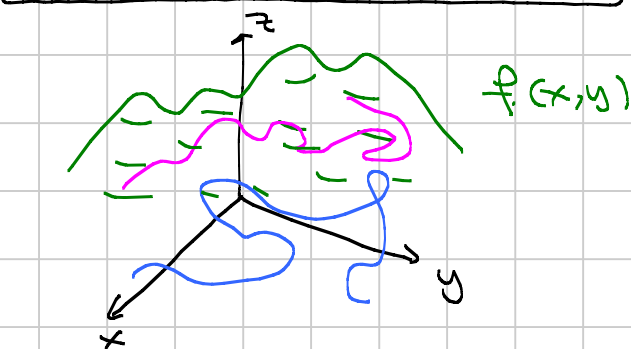
$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione

↑ basta in realtà che $f(x)$

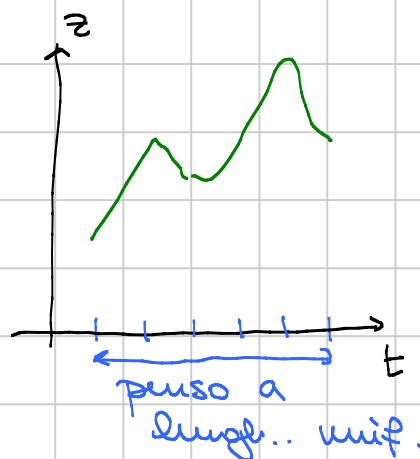
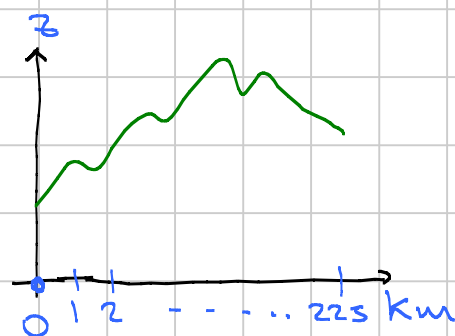
sia definita sul supporto di γ

2 SIGNIFICATO GEOMETRICO

$m=2$



NON È $f(\gamma(t))$



(penso di percorrere a
velocità costante)

Significato geometrico

$\int_{\gamma} f(x) ds =$ integrale del profilo altimetrico della tappa
supposta percorsa a velocità unitaria.

③ IDEA DELLA DEFINIZIONE Facciamo caso semplice:
 γ e f continue.

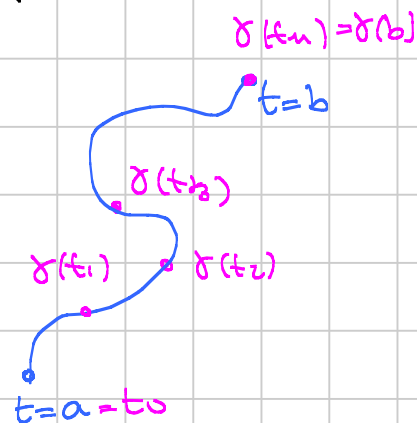
Divido la curva in tanti tratti e poi calcolo somme inferiori e superiori

$$\sum_{k=1}^n M_k \text{ lungh}(\gamma(t_{k-1}) \sim \gamma(t_k))$$

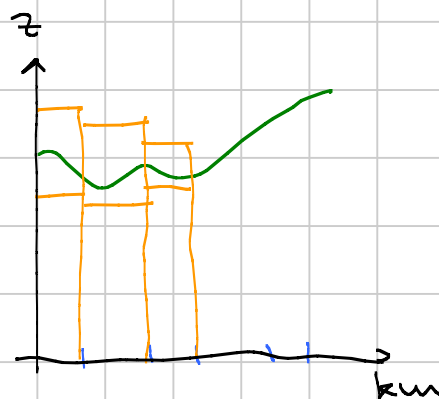
↑
 max di f
 nel tratto
 k -esimo

$$\sum_{k=1}^n m_k \text{ lungh}(\gamma(t_{k-1}) \sim \gamma(t_k))$$

↑
 min di f
 nel tratto



Poi faccio variare le partizioni come sempre.



④ Formula per il calcolo Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è C^1 , allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Per $n=2$ diventa

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Def. Si definisce baricentro di una curva il pto G di coord. (nel caso piano)

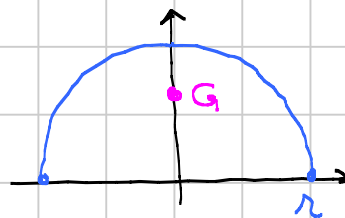
$$x_G := \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$$

$$y_G := \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio Baricentro della semicirconferenza.

È chiaro per simmetria che $x_G = 0$.

Calcolo y_G



$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \pi r \quad \int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{\pi} \underbrace{r \sin t}_{y(t)} \underbrace{\sqrt{r^2}}_{\text{speed}} \, dt = 2r^2$$

$$\text{Quindi } y_G = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

Oss. Anche l'integrale curvilineo NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

[Dim.: esercizio di integrazione per sostituzione come con la lunghezza]

Seconda dim. della formula per la lung. di curve C^1

$$\text{lunghe}(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \quad \leadsto \text{sempre usando il lemma facile di stima dall'alto.}$$

$$\text{lunghe}(\gamma) \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Idea: fissare $\varepsilon > 0$ e trovare una poligonale di

$$\text{lunghe} \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt - \varepsilon \text{ qualcosa}$$

Tutte le componenti $\dot{\gamma}_i$ della velocity sono continue, quindi unif. cont., quindi prendo δ con cui ε e faccio vedere che ogni poligonale con $t_k - t_{k-1} \leq \delta$ va bene.

$$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}_i(t) dt = (t_k - t_{k-1}) \dot{\gamma}_i(\theta_{i,k})$$

↑
tra t_{k-1} e t_k

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = (t_k - t_{k-1}) \|\dot{\gamma}(s_k)\|$$

↑
intermedio

Aggiunto dopo video:
si può ottenere direttamente
con Lagrange senza
passare dall'integrale

Allora

$$\underbrace{\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})}_{v_i} = \underbrace{(t_k - t_{k-1}) \dot{\gamma}_i(s_k)}_{w_i} + \underbrace{(t_k - t_{k-1}) (\dot{\gamma}_i(\theta_{i,k}) - \dot{\gamma}_i(s_k))}_{u_i}$$

Sono componenti di 3 vettori u, v, w con $v = w + u$,
quindi

$$\|v\| \geq \|w\| - \|u\|$$

che vuol dire

$$\underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\|v\|} \geq \underbrace{(t_k - t_{k-1}) \|\dot{\gamma}(s_k)\|}_{\|w\|} - \|u\|$$



$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon \sqrt{n} (t_k - t_{k-1})$$

↓
Tutte le comp. di u
sono + piccole di
 $(t_k - t_{k-1}) \cdot \varepsilon$

Sommando su k ho ottenuto

$$\text{lungh. poligonale} \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \sqrt{n} (b-a) \varepsilon$$

↑
fisso, quindi ok.

