

Lunghezza di una curva

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{lunghe}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

Teorema Se γ è di classe C^1 , allora

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\text{speed} = \text{velocity}} dt$$

Casi particolari

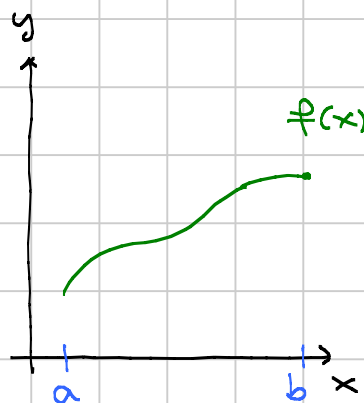
$$\boxed{1} \quad m=2 \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \rightsquigarrow \text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

$$m=3 \rightsquigarrow \text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

 $\boxed{2}$ Curve cartesiane nel piano = tratti del grafico di una funzione

$$\gamma(t) := (t, f(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2(x)} dx$$

 $\uparrow$
 $\dot{x}$ $\dot{y}$  $\boxed{3}$ Curve in coordinate polari : dati $\rho(t)$ e $\theta(t)$, quindi

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

Da queste:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

Calcolo la speed²:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$+ \dot{\rho}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

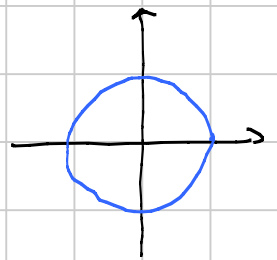
$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Quindi

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t) \dot{\theta}^2(t)} dt$$

Esempio 1 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_1 dt = 2\pi$$

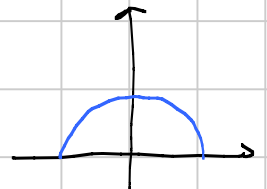


la curva è percorsa a velocità unitaria

Esempio 2 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi] \rightsquigarrow \text{lunghe}(\gamma) = \pi$

$$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



Se calcolo la speed con γ_1 e γ_2 viene un calcolo più complicato.

— o — o —

Domanda: due curve che percorrono lo stesso sostegno, hanno la stessa lunghezza?

Risposta: sì, se il sostegno viene percorso lo stesso numero di volte in maniera continua.

Enunciato 1 Supponiamo $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 .
Supponiamo $\varphi: [c, d] \xrightarrow{\text{sing.}} [a, b]$ una funzione C^1 strettamente monotona (dunque invertibile).
Posso porre $\gamma_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita come

$$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$$

(Brutalmente: γ_1 fa lo stesso tragitto di γ , solo a velocità diversa)

Allora $\text{lunghe}(\gamma) = \text{lunghe}(\gamma_1)$ (non ho detto che γ è iniettiva)

Dim. $\dot{\gamma}_1(t) = \underbrace{\dot{\gamma}(\varphi(t))}_{\text{vettore}} \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{numero}}$, quindi

$$\|\dot{\gamma}_1(t)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \varphi'(t)$$

$\uparrow$ assumo φ crescente

Allora

$$\begin{aligned} \text{lunghe}(\gamma_1) &= \int_c^d \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt \\ &= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \quad z = \varphi(t) \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(z)\| dz = \text{lunghe}(\gamma) \end{aligned}$$

Se φ è decrescente devo mettere $-\varphi'(t)$ e invertire gli estremi.

Enunciato 2 Supponiamo $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua
 Supponiamo $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ debolmente
 monotona e continua e surgettiva.
 $\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$
 e avremo

forse nemmeno
no sense

$$\text{lunghe}(\gamma) = \text{lunghe}(\gamma_1)$$

Dim. Si tratta di dimostrare che ogni poligonale fatta sulla γ corrisponde ad una poligonale fatta sulla γ_1 e viceversa.

Poligonale su γ_1 : $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$

$$\gamma_1(s_0), \dots, \gamma_1(s_m)$$

$$\gamma(\varphi(s_0)), \dots, \gamma(\varphi(s_m))$$



poligonale su γ con tempi

$$a = \varphi(s_0) < \varphi(s_1) < \dots < \varphi(s_m) = b$$

(se φ è deb crescente)

Viceversa, data poligonale su γ , corrispondente a

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

scelgo tempi

$$c = s_0 < s_1 < \dots < s_n = d$$

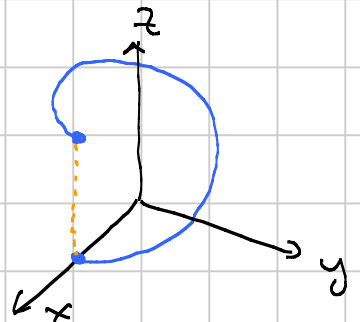
tali che $\varphi(s_i) = t_i$ (posso in maniera non unica grazie
 a monotonia + surgettività).

— o — o —

Esempio Elica cilindrica $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2}$$



Achtung! Per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ **NON** vale un equivalente di Lagrange.

$$\underbrace{\gamma(b) - \gamma(a)}_{\text{vettore}} = (b-a) \underbrace{\dot{\gamma}(c)}_{\text{vettore}}$$

Non è detto che esista $c \in [a, b]$ per cui vale

L'esempio è l'elica: $\gamma(b) - \gamma(a) = (1, 0, 2\pi) - (1, 0, 0) = (0, 0, 2\pi)$

D'altra parte: $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$
non possono essere
nulle insieme

Achtung! Componente per componente vale Lagrange

$$\gamma_i(b) - \gamma_i(a) = (b-a) \dot{\gamma}(c_i)$$

$\uparrow$
dipende da i , cioè dalla
componente

Esempio 1 $(t, t^2) : t \in [a, b]$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \underbrace{4t^2}_{\dot{\gamma}^2}} dt = \text{si fa}$$



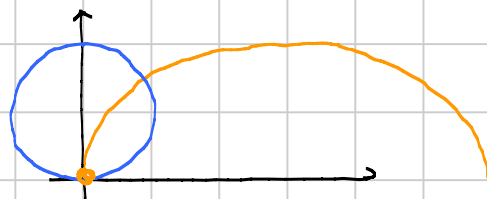
Esempio 2 Cicloide

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

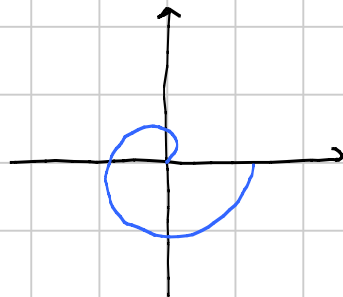
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt \quad \text{si fa con } t = 2z + \text{ formule per } \cos(2z)$$



Esempio 3 $\rho(t) = t$, $\theta(t) = t$ $t \in [0, 2\pi]$

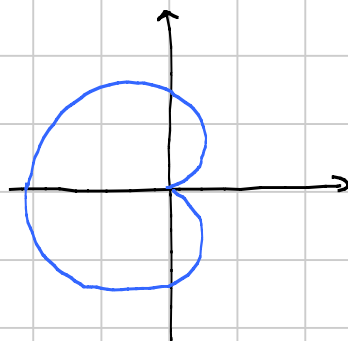
Spirale di eq. polare $\rho = \theta$

$$\begin{aligned} \text{length}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt = \text{solito} \end{aligned}$$



Esempio 4 Cardioida $\rho = 1 - \cos \theta$

$$\theta(t) = t \quad \rho(t) = 1 - \cos t$$



Si calcola la lunghezza

Esercizio Supponiamo $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUA.

È vero che posso definire la lunghezza usando solo le poligoni con i tempi equispaziati?

— o — o —