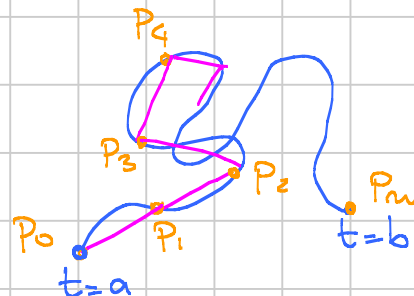


LUNGHEZZA DI UNA CURVASia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

Idea intuitiva: fisso dei tempi

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e vedo i corrispondenti punti $P_k = \gamma(t_k)$.

Li unisco con una spezzata di cui calcolo la lunghezza sommando le lunghezze dei segmenti.

Tutte le poligonalari così ottenute intuitivamente hanno lunghezza minore della curva. Quindi si pone

$$\text{Lunghezza curva} = \sup \text{Lunghezze poligonalari}$$

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Si definisce

$$\text{Lunghezza}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\substack{\text{Lunghezza segmento} \\ P_{k-1} P_k}} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

La lunghezza $\in [0, +\infty]$ può essere anche $+\infty$.

Bruttalmente: la lunghezza della curva è quello che indica il contakil alla fine del percorso, quindi

TRATTI RIPETUTI CONTANO PIÙ VOLTE

Def. Una curva si dice rettificabile se ha lunghezza FINITA.

— o — o —

Prop 1 Le curve lipschitziane sono rettificabili e

$$\text{lungh.} \leq L \cdot (b-a)$$

$\uparrow$ cost. di Lip $\uparrow$ lungh. intervallo

Dim. Per ipotesi γ è Lip., quindi

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq L |t-s| \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall s \in [a,b]$$

Fissati comunque $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, avremo

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^n L |t_k - t_{k-1}| = L (b-a)$$

$\uparrow$ telescopico

Quindi tutte le poligonali hanno lunghe $\leq L(b-a)$.

Teorema Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 .
Allora γ è rettificabile e

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\text{speed}} dt$$

spazio = integrale della speed rispetto al tempo.

PARENTESONA

Integrale delle funzioni vettoriali

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme misurabile, e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Cosa vuol dire

$$\int_A f(x) dx$$

È il vettore che ha come componenti $\int_A f_i(x) dx$, dove

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Lemma 1 (stima dall'ALTO per integrale vettoriale)

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\| dx$$

Oss. Non segue banalmente da quello con il valore assoluto.

Dim Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\langle v, \int_A f(x) dx \rangle = \sum_{k=1}^n v_k \int_A f_k(x) dx$$

$$= \int_A \sum_{k=1}^n v_k f_k(x) dx$$

$$= \int_A \langle v, f(x) \rangle dx$$

(i prodotti scalari
entrano negli
integr. vettoriali)

$$(c.s.) \leq \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\| dx$$

$$= \|v\| \int_A \|f(x)\| dx$$

Mettendoli insieme LHS e RHS abbiamo ottenuto

$$\langle v, \int_A f(x) dx \rangle \leq \|v\| \int_A \|f(x)\| dx$$

Ora pongo

$$v = \int_A f(x) dx$$

e trovo

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x) dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\| dx$$

Semplifico e ho finito.

— o — o —

Lemma 2 (stima dal BASSO per integrale vettoriale)

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

dove $x_0 \in A$ è un pto qualunque.

Dim.

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_A f(x_0) dx + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \\ &= \text{meas}(A) f(x_0) + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \end{aligned}$$

Per la triangolare

$$\|v\| \geq \|v_1\| - \|v_2\|$$

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \text{meas}(A) \|f(x_0)\| - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

uso Lemma 1 +
segno - davanti

$$\geq \text{meas}(A) \|f(x_0)\| - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

$$\geq \text{meas}(A) \|f(x)\| - \text{meas}(A) \|f(x) - f(x_0)\|$$

uso

$$\|f(x_0)\| \geq \|f(x)\| - \|f(x) - f(x_0)\| \quad - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Integro LHS e RHS su A . Ottengo

$$\text{meas}(A) \left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \text{meas}(A) \int_A \|f(x)\| dx$$

$$- \text{meas}(A) \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

$$- \text{meas}(A) \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Semplifico $\text{meas}(A)$ e ho finito.

— o — o —

Dim. teorema

Fase facile : fisso $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Allora per ogni $k = 1, \dots, n$ uso Lemma 1 e ottengo

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \end{aligned}$$

Sommo su k e ottengo

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\text{lunghezza poligonale}} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Facendo il sup su tutte le suddivisioni ottengo

$$\boxed{\text{lunghezza}(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.}$$

Fase meno facile . Ottenere la disug. opposta.

Fisso $\varepsilon > 0$, la $t \rightarrow \dot{\gamma}(t)$ è continua, quindi unif. cont., quindi prendo il δ corrispondente, cioè

$$|t-s| \leq \delta \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)\| \leq \varepsilon \quad t, s \in [a, b]$$

Ora prendo una qualunque suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ con tutti intervalli minori di δ , cioè $|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$.

Allora per il Lemma 2

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \underbrace{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s_k)\| dt}_{\substack{\text{p.to a caso} \\ \text{in } [t_{k-1}, t_k]}} \\ &\geq -2\varepsilon(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2\varepsilon(t_k - t_{k-1})$$

Sommando

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

e quindi

$$\text{lunghezza}(\gamma) \geq \int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario è finita

— o — o —

[Oss.] Ho usato i lemmi 1 e 2 con $A = [t_{k-1}, t_k]$, ma i lemmi valgono più in generale anche per integrali multipli.

— o — o —