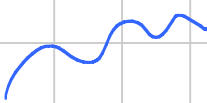


CURVE IN $\mathbb{R}^n$

Def. Una CURVA è una funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 Si dice SOSTEGNO DELLA CURVA l'immagine di γ ,
 cioè

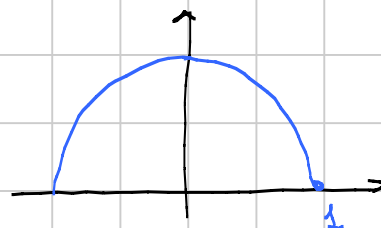
$$\{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Oss.  Quello che si disegna è il sostegno, ma lo stesso sostegno può provenire da parametrizz. diverse

Brutalmente, una curva è un modo di percorrere il sostegno.

Esempio 1 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$

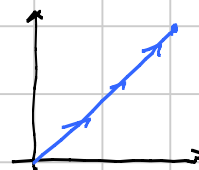
$$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



Sono due curve che hanno lo stesso sostegno.

Esempio 2 $\gamma_1(t) = (t, t) \quad t \in [0, 1]$

$$\gamma_2(t) = (t^2, t^2) \quad t \in [0, 1]$$



Stesso sostegno, stesso verso di percorrenza.

Esempio 3 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

Stesso sostegno, ma "numero di giri diverso".



Def. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- **CHIUSA** se $\gamma(b) = \gamma(a)$



- **SEMPLICE** se γ è iniettiva tranne al più agli estremi.
Detto in modo complicato

$$\forall t \in [a, b], \forall s \in [a, b] \quad \gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } t \in \{a, b\} \text{ e } s \in \{a, b\}$$

Come dimostro che una curva è semplice?

CASO FACILE Esiste almeno una componente monotona
 $\Rightarrow$ la curva è semplice

$$\gamma(t) = (t^2 - 7 \sin t, \arctan t, e^{t^2}) \quad t \in [-7, 7]$$

$\uparrow$
è monotona 😊

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow \arctan t = \arctan s \Rightarrow t = s$$

CASO INTERMEDIO Riesco a trovare una qualche quantità monotona

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad t \in [12, 127]$$

La distanza di $\gamma(t)$ dall'origine, cioè il ρ delle polari, è
 $\|\gamma(t)\| = t$ è monotono.

CASO GENERALE Provo a risolvere il sistema...

Esempio $\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 1]$

È chiusa perché $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0) \Rightarrow$ addio prime 2 opzioni

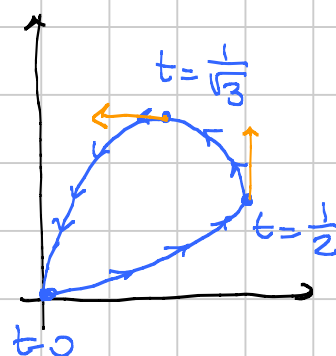
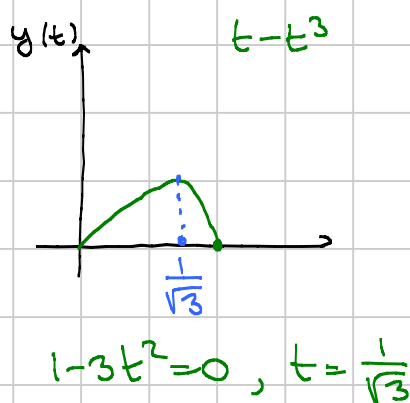
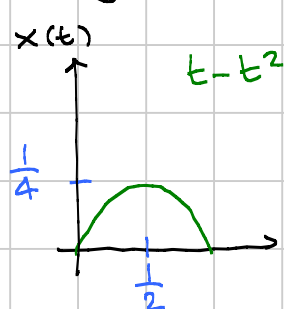
Impongo il sistema
$$\begin{cases} t - t^2 = s - s^2 \\ t - t^3 = s - s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t - s = (t+s)(t-s) \\ t - s = (t-s)(t^2 + ts + s^2) \end{cases}$$

Se $t=s$ sono contenuti. Altrimenti semplifico

$$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases} \quad \text{sostituzione, oppure} \quad \begin{cases} 1 = t^2+s^2+2ts \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \leadsto ts=0 & \begin{cases} \nearrow t=0 \leadsto s=1 \\ \searrow s=0 \leadsto t=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \text{ dalla 1ª eq.} \end{aligned}$$

Disegno della curva Facciamo il grafico delle 2 componenti



$t \in [0, \frac{1}{2}] \leadsto x(t) \text{ e } y(t) \text{ crescono}$

$t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] \leadsto x(t) \text{ scende e } y(t) \text{ sale}$

$t \in [\frac{1}{3}, 1] \leadsto x(t) \text{ e } y(t) \text{ scendono}$
— 0 — 0 —

Def. Supponiamo che γ sia di classe C^1 . Allora si definisce retta tangente alla curva nel pto corrispondente a $t_0 \in [a, b]$ la retta di eq. parametrica

$$\underbrace{\gamma(t_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{vettori}}} + t \underbrace{\dot{\gamma}(t_0)}_{\uparrow}$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t_0)$ si dice VETTORE TANGENTE alla curva

Nell'esempio precedente

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (1-2t, 1-3t^2)$$

$$\dot{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\dot{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Oss. Il vettore tangente può essere nullo e in quel caso la retta tangente non è definita.

Oss. Il vettore tangente è la
VELOCITY $\leadsto$ velocità vettoriale
SPEED $\leadsto$ velocità scalare = $\|\dot{\gamma}(t)\|$
— o — o —

aggiunto dopo video