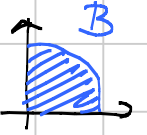


Esercizio 1 $\iint_B \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} dx dy$ Per quali a converge



Brutale: $\frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a-2 < 2 \Leftrightarrow a < 2$

Dim. che per $a < 2$ converge usando la disug. $\arctan t \leq t$ per $t \geq 0$

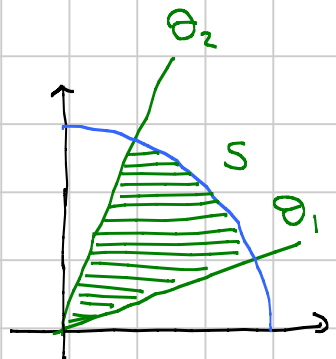
$$f(x,y) \leq \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}, \text{ quindi}$$

$$\iint_B f(x,y) dx dy \leq \iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} dx dy \text{ e questo si calcola con le polari}$$

Per dimostrare che diverge per $a \geq 2$ posso usare la disug. opposta

$$\arctan t \geq \frac{t}{27} \text{ che vale per } t \in [0, t_0] \text{ per } t_0 > 0 \text{ opportuno}$$

In alternativa posso restringermi ad un settore circolare abbastanza stretto



$$\begin{aligned} \iint_B f(x,y) dx dy &\geq \iint_S f(x,y) dx dy \\ &= \int_0^1 dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(\rho^2 \sin\theta \cos\theta)}{\rho^{2a}} \cdot \rho \\ &\geq \int_0^1 dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2a}} \rho \end{aligned}$$

$\geq m_0 > 0$ se $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

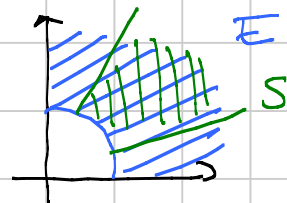
$$= (\theta_2 - \theta_1) \int_0^1 \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2a-1}} d\rho.$$

e questo si fa per confronto asintotico di analisi 1.
Quindi converge $\Leftrightarrow a < 2$.

Esercizio 1 bis Stessa cosa su tutto il cerchio.

- Per $a < 2$ converge e converge a 0
- Per $a \geq 2$ è indeterminato $\iint f_+ = +\infty = \iint f_-$
(buchi diversi producono limiti diversi)

Esercizio 2 $\iint_E \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



Facile: convergenza per $a > 1$

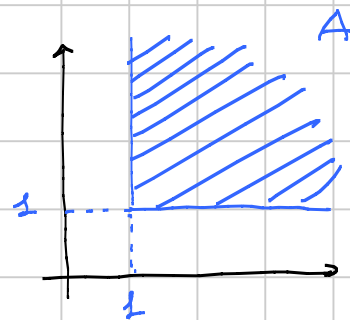
$$f(x,y) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{2a}} \quad \text{converge per } 2a > 2, \text{ cioè } a > 1$$

Voglio dim. che diverge per $a \leq 1$. Stimo con il settore come prima

$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y) dx dy &\geq \iint_S f(x,y) dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\arctan(\overbrace{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}^{\geq m_0 > 0})}{\rho^{2a}} \cdot \rho d\theta \end{aligned}$$

e concludo come prima

Esercizio 3 $\iint_A \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



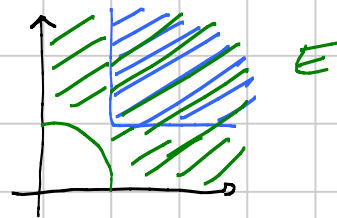
Brutale: $f(x,y) = \frac{\rho^3}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-3}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a-3 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$

• Dimostro che converge per $a > \frac{5}{2}$

$$\iint_A f(x,y) dx dy \leq \iint_E f(x,y) dx dy$$

↑ si fa in polari e converge se $a > \frac{5}{2}$



• Dimostro che diverge per $a \leq \frac{5}{2}$

Scelgo un settore $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ e $R \geq R_0$

Se R_0 è abbastanza grande, allora $S \subseteq A$

$$\iint_A f(x,y) dx dy \geq \iint_S f(x,y) dx dy$$

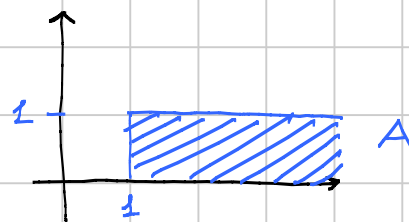
↑ si fa in polari e diverge per $a \leq \frac{5}{2}$

$$\int_{R_0}^{+\infty} dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{p^3 \boxed{\cos^2 \theta \sin \theta}}{p^{2a}} \cdot p$$

Serve che $\cos^2 \theta \sin \theta \geq m_0 > 0$ per $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Esempio 4 $\iint_A \frac{x^a y}{x^6 + y^8} dx dy$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a y}{x^6 + y^8} = (\star)$$



Vediamo quando converge

$$(\star) \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^6} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6-a}} \quad \text{che converge per } a < 5$$

Vediamo se diverge per $a \geq 5$

$$(\star) \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{0}{x^6 + 1} \quad \text{☹️}$$

$$(*) \geq \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \frac{\frac{1}{2} x^a}{x^b + 1} \quad \text{☺}$$



Oss. Anche senza restringere l'insieme, potremo lasciare la y sopra e fare l'integrale in dy
— o — o —

Esempio 5 Consideriamo $I_n = \int_{E_n} \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$



dove $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq n^2\}$

Dimostrare che I_n è ben definito, $I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, e se riesce calcolare ordine di infinitesimo e parte principale.

Basta dim. che converge. Pareggio gli esponenti $x = u, y = v^2$

Calcolo J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 2v$$

e mi riduco a $\iint_{F_n} \frac{1}{u^4 + v^4} \cdot 2v du dv$ e questo $\sim \frac{1}{p_3}$, quindi formale
 $\uparrow$
insieme diverso, ma "fatto allo stesso modo"

Perché $I_n \rightarrow 0$? Per un fatto generale!

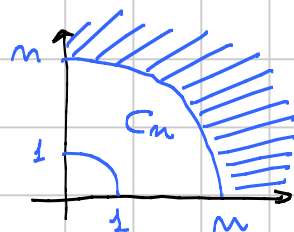
Se $\iint_E f(x, y) dx dy < +\infty$

con $E =$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{E_n} f(x, y) dx dy = 0$ per ogni successione E_n che invade E

Sostanzialmente si usa che

$$\iint_E = \iint_{E_n} + \iint_{C_n} \rightarrow \iint_E \text{ per definizione}$$



quindi

$$\iint_{E_m} = \iint_E - \iint_{C_m}$$

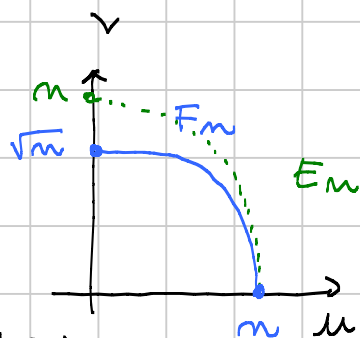
$\downarrow$
 $\iint_E$

Come possiamo stimare l'integrale I_m ?

Prima idea: che cada come $\int_m^{+\infty} \frac{1}{p^3} \cdot p \, dp \sim \frac{1}{m}$

Ma F_m non esattamente E_m , detto meglio

$$F_m = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^4 \geq m^2 \right\}$$
$$v \geq \sqrt[4]{m^2 - u^2}$$



Per ora possiamo dire solo che $F_m \supseteq E_m$ per $m \geq 1$,
quindi posso dire solo che

$$\iint_{F_m} \frac{2v}{u^4 + v^4} \, du \, dv \geq \iint_{E_m} \frac{2v}{u^4 + v^4} \, du \, dv \sim \frac{1}{m}$$

Per avere una stima dall'altra parte per il momento ho solo

$$\iint_{F_m} \leq \iint_{E_m} \text{ che però va come } \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Provare a vedere se si trova l'asintotico giusto!

— o — o —