

VOLUME PALLA m-DIMENSIONALE

Dato $R > 0$, consideriamo $B_R := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2\}$
 Voglio calcolare

$$\text{meas}_m(B_R)$$

Ci aspettiamo che sia del tipo $\omega_m R^m$, con ω_m succ. opportuna

1° approccio Sezioni rispetto ad una variabile, ad esempio x_m

$$\text{meas}_m(B_R) = \int_{-R}^R dx_m \int_{S_{x_m}} 1 \, dx_1 \dots dx_{m-1}$$

la sezione è una palla in
dimensione $m-1$ di raggio
 $\sqrt{R^2 - x_m^2}$

$$x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \leq R^2 - x_m^2 \leftarrow \text{descrive la sezione } S_{x_m}$$

$$= \int_{-R}^R dx_m \, \text{meas}_{m-1}(B_{\sqrt{R^2 - x_m^2}})$$

ipotesi indut. $\rightarrow$ $= \int_{-R}^R dx_m \, \omega_{m-1} (R^2 - x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}$

$$= \omega_{m-1} \int_{-R}^R R^{m-1} \left(1 - \left(\frac{x_m}{R}\right)^2\right)^{\frac{m-1}{2}} dx_m$$

$$= \omega_{m-1} R^m \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz$$

$$= \omega_{m-1} R^m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \, dt$$

$$x_m = R z$$

$$dx_m = R dz$$

$$z = \sin t$$

$$dz = \cos t \, dt$$

Abbiamo ottenuto

$$\omega_m = \omega_{m-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \, dt$$

$\nearrow$ c'è una formula
ricorrente che lega
m ad m-2

2° approccio Provare a scegliere di due con la dimensione

$$\text{meas}_m(B_R) = \iint_{\substack{\uparrow \\ x_1^2 + x_2^2 \leq R^2}} dx_1 dx_2 \underbrace{\iint \dots \int}_{\substack{\uparrow \\ x_3^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_3 \dots dx_n$$

$$= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \underbrace{\text{meas}_{n-2}(B_{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}})}_{\text{ipotesi induttiva}}$$

$$= \omega_{n-2} \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2} (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_1 dx_2$$

$$= \omega_{n-2} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\sigma (R^2 - p^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot p$$

$$= \pi \omega_{n-2} \int_0^R 2p (R^2 - p^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$= \pi \omega_{n-2} \left[- (R^2 - p^2)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\frac{n}{2}} \right]_{p=0}^{p=R}$$

$$= \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} R^n$$

Da qui ricaviamo

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2}$$

Visto che $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, da qui si ricavano ricorsivamente tutti gli ω_n . Si ottiene

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$$

$$\omega_{2k+2} = \frac{2\pi}{2k+2} \omega_{2k} = \frac{\pi}{k+1} \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\omega_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{2\pi}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2(4\pi)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$$

↑
fatto solo sui
dispari

Oss. C'è una formula che le contiene entrambe ed è

$$\omega_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero

Per verificare l'uguaglianza basta ricordare che

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ per k intero ≥ 1
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (integrale gaussiano)
- $\Gamma(x) = x \Gamma(x-1)$ per ogni $x > 0$
— 0 — 0 —

INTEGRALI IMPROPRI IN DIM n

Caso con pbm. in 0

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \alpha < n \\ \searrow \text{diverge} & \alpha \geq n \end{cases}$$

Caso con pbm. all' ∞

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \alpha > n \\ \searrow \text{diverge} & \alpha \leq n \end{cases}$$

Per dimostrarlo ci sono 2 modi

① Introdurre coordinate "sferiche" in $\mathbb{R}^n$: ad esempio in $\mathbb{R}^4$ userei 2 latitudini φ_1 e φ_2 .

Indicate le cartesiane con x, y, z, w si può porre

$$\begin{aligned} w &= \rho \sin \varphi_2 & x &= \rho \cos \varphi_2 \\ y &= \rho \cos \varphi_2 & z &= \rho \cos \varphi_2 \end{aligned} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{coordinate sferiche} \\ \text{classiche in } \mathbb{R}^3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cos \varphi_1, \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{array}$$

Si tratta ora di dim. per induz. che $J = \rho^{n-1}$. roba trigonometrica.

② Procedere direttamente per involuzione. Facciamo il pbm. in $\mathbb{O}$
Integro sul cubo

$$C_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1 \text{ per ogni } i=1, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_n} \frac{1}{|x|^\alpha} dx &\stackrel{\text{cartesiano}}{=} \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 dx_n \frac{1}{(\underbrace{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}_{b^2} + x_n^2)^{\alpha/2}} \\ &= \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + x_n^2)^{\alpha/2}} dx_n \end{aligned}$$

Parentesi di analisi 1

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + t^2)^{\alpha/2}} dt &\stackrel{t=bz}{dt=b dz} = \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{b}{(b^2 + b^2 z^2)^{\alpha/2}} dz \\ &= \frac{b}{b^\alpha} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{b^{\alpha-1}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} \end{aligned}$$

Due casi

• se $1 < \alpha < n$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty$, quindi

$$\text{int. iniziale} \leq \underbrace{\int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{1}{b^{\alpha-1}}}_{\text{converge per hp involutiva}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}}_{\text{numero}}$$

• se $\alpha \geq n$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty$, ma non ci serve perché

$$\text{int. iniziale} \geq \underbrace{\int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{1}{b^{\alpha-1}}}_{\text{Diverge per hp involutiva}} \underbrace{\int_{-\frac{1}{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}}_{\text{numero} > 0}$$

• se $\alpha \leq 1$ ho ancora convergenza perché

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \leq \frac{1}{|x|^\beta} \text{ per ogni } |x| \leq 1 \text{ e ogni } \alpha < \beta \text{ e basta scegliere } \beta \in (1, n)$$