

Qss. Proviamo a fare $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$ direttamente in polari

$$= \int_1^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{p}{p^2 \cos^2 \theta + p^4 \sin^4 \theta} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{p} dp \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta + p^2 \sin^4 \theta} d\theta$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ converge, ma ad un valore dipendente da p in modo misterioso

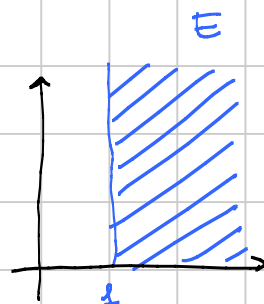
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} dp \frac{1}{p \cos^2 \theta + p^3 \sin^4 \theta}$$

converge per quasi ogni valore di θ , meglio per $\theta \neq 0, \pi, 2\pi$, ma il valore dipende da θ in modo misterioso

Altra via (perversa?)

$$\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2+y^4}$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} dy$$



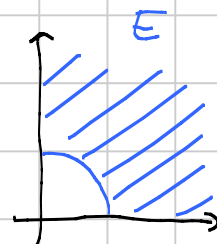
Pongo $\frac{y^2}{x} = z$, quindi $y^2 = xz$, quindi $y = \sqrt{x} \sqrt{z} \leadsto dy = \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z} (1+z^2)} dz$$

Numero

$$(\star) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x} \cdot \text{numero} = \frac{\text{numero}}{2} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{x}} dx < +\infty$$

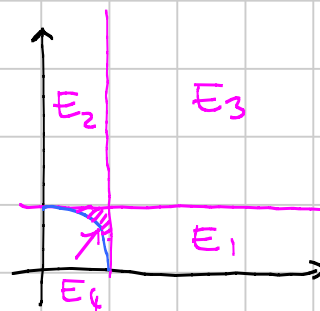
$$\iint_E \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2}}_{f(x,y)} dx dy$$



$f(x,y) \leq \frac{1}{p^2}$, ma questo non aiuta...

Brutale: x^2y^2 mi può dare una mano, essendo un ρ^4 ,
una solo lontano dagli assi.

Idea: separo le zone (DIVIDE ET IMPERA)



zona E_4 : no problem

le zone E_1 ed E_2 sono simmetriche, quindi
posso studiare solo E_1

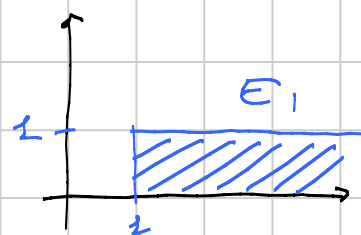
$$\begin{aligned}\iint_{E_1} f(x,y) dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} \\ &\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty\end{aligned}$$

Resta la zona E_3

$$\begin{aligned}\iint_{E_3} f(x,y) dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy f(x,y) \leq \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{x^2y^2} \\ &= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_I \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy}_I < +\infty\end{aligned}$$

Esempio E_1 di prima

$$\iint_{E_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad \text{Per quali } a \text{ converge}$$



$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^{2a}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2a}} dx$$

converge se $a > \frac{1}{2}$. Ho dimostrato che l'integrale iniziale
converge per $a > \frac{1}{2}$.

Per gli altri $a \leq \frac{1}{2}$ non posso dire nulla.

Per studiare i valori $a \leq \frac{1}{2}$ serve disug. dall'altra parte

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+1)^a} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^a}$$

e questo diverge per $a \leq \frac{1}{2}$ completando la risposta.

Esempio $\iint_B \frac{\log(1+x) \sin \theta y}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



per quali a converge?

Brutale: $f(x,y) \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$ quindi converge
 $\Leftrightarrow 2a-2 < 2$
 $\Leftrightarrow a < 2$

Disuguaglianza dall'alto

Esistono 2 costanti M_1 ed M_2 tali che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &\leq M_1 x & \forall x \in [0,1] \\ \sin \theta y &\leq M_2 y & \forall y \in [0,1] \end{aligned}$$

Banale Analisi 1 dopo
aveva diviso e fatto il
limite

quindi $f(x,y) \leq M_1 M_2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$

Questo faccio in polari e vedo che converge per $a < 2$.

Disuguaglianza dal basso

Esistono M_3 ed M_4 strett. positive
tali che

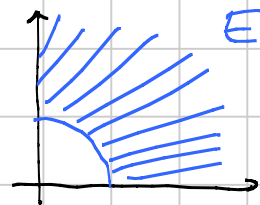
$$\begin{aligned} \log(1+x) &\geq M_3 x & \forall x \in [0,1] \\ \sin \theta y &\geq M_4 y & \forall y \in [0,1] \end{aligned}$$

$f(x,y) \geq M_3 M_4 \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$ in polari

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\cos \theta \sin \theta \rho^2}{\rho^{2a}} \cdot \rho = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-3}} d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \neq 0$$

Esempio $\iint_E \frac{xy}{(x^2+y^4)^a} dx dy$

$x = u^2, y = v \rightsquigarrow J = 2u$



$\iint_E \dots = \iint_F \frac{u^2 \cdot v}{(u^4+v^4)^a} \cdot 2u du dv \sim \frac{\rho^4}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{4a-4}}$

↑
zona
simile

quindi l'idea è che converge
 $\Leftrightarrow 4a-4 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$

Occhio a fare bene la parte dal basso
— 0 — 0 —

Esempio $\iiint_E \frac{xy^az}{x^2+y^4+z^6} dx dy dz$ $E: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
 $x^2+y^4+z^6 \geq 1$

Poneggi gli esponenti ponendo: $x = u^6, y = v^3, z = w^2$

$\begin{pmatrix} 6u^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 36 u^5 v^2 w$

$\iiint_E f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_F \frac{u^6 v^{3a} w^2}{u^{12} + v^{12} + w^{12}} u^5 v^2 w du dv dw$

↑
dello stesso tipo

di E: $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u^{12} + v^{12} + w^{12} \geq 1$

Brutale: funzione $\sim \frac{\rho^{16+3a}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{-4-3a}}$

e questo converge $\Leftrightarrow -4-3a > 3$

$3a < -7 \quad a < -\frac{7}{3}$

Nella dimostrazione

→ la disug. dall'alto è facile

→ quella dal basso un po' più delicata e bisogna passare in sferiche

Domanda: come posso controllare il termine $u^{12} + v^{12} + w^{12}$.

Uscita rapida: esistono 2 costanti POSITIVE k_1 e k_2 t.c.

$$k_2 (u^2 + v^2 + w^2)^6 \leq u^{12} + v^{12} + w^{12} \leq k_1 (u^2 + v^2 + w^2)^6$$

per ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Tutto si riduce a

$$k_2 \leq \frac{u^{12} + v^{12} + w^{12}}{(u^2 + v^2 + w^2)^6} \leq k_1$$

per ogni $(u, v, w) \in$ sfera $(u^2 + v^2 + w^2) = 1$

e sulla sfera max e min esistono per w .

Achtung! Se pareggio gli esponenti per fare un limite, NON devo mettere j . Per gli integrali sì.