

INTEGRALI IMPROPRI

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua (ma basta meno)
tale che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

È ragionevole porre

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

esiste $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

dove $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Prop. Sia $\{A_k\}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ tali che

(i) A_k è limitato e misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$

(ii) A_k "civale $\mathbb{R}^2$ " nel senso che

$$\forall R > 0 \quad A_k \supseteq B_R \text{ definitivamente}$$

Allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{A_k} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

Brutalmente : $\iint_{\mathbb{R}^2}$ non dipende da come si "civale" $\mathbb{R}^2$.

Dim. Ci sono due casi a seconda che il limite al RHS sia $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$. Faccio solo il caso in cui è $L \in \mathbb{R}$ (l'altro è più semplice)
Fisso $\varepsilon > 0$ e dimostro che

$$L - \varepsilon \leq \iint_{A_k} \dots \leq L \quad \text{definitivamente}$$

La disug. di destra vale per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti ogni A_k per l'ipotesi (i) è contenuto in una certa B_{R_k} con R_k opportuno quindi

$$\iint_{A_k} \dots \leq \iint_{B_{R_k}} \dots \leq L$$

↑ perché il limite a RHS è il sup

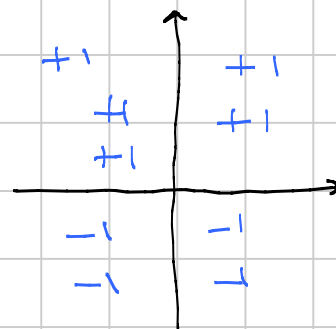
Per la disug. di sx so che esiste $R_\varepsilon > 0$ t.c.

$$\iint_{B_{R_\varepsilon}} f(x,y) dx dy \geq L - \varepsilon \quad \forall R \geq R_\varepsilon$$

Ma definitivamente $A_k \supseteq B_{R_\varepsilon}$ e quindi $\iint_{A_k} \dots \geq \iint_{B_{R_\varepsilon}} \geq L - \varepsilon$.

Achtung! Il discorso non vale se $f(x,y)$ ha segno variabile, anche se è limitata.

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} +1 & \text{nel 1° e 2° quadrante} \\ -1 & \text{nel 3° e 4°} \end{cases}$



$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy = 0$$

$$A_k = [-k, k] \times [-k, k+1]$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{A_k} \dots = +\infty$$

Posso fare in modo che il limite sia un qualunque $L \in \mathbb{R}$ oppure anche che non esiste.

Domanda C'è un esempio in cui il limite su B_R oppure su $[-k, k] \times [-k, k]$ è diverso?

Oss. Il discorso è lo stesso per qualunque integrale improprio in più variabili.

Esercizio Calcolare l'integrale su $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} p = 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R p e^{-p^2} dp \\ &= \pi \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-p^2}]_0^R = \pi \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-R^2} + 1] = \pi \end{aligned}$$

Lo stesso limite lo posso calcolare con $A_k = [-k, k] \times [-k, k]$

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k dy e^{-x^2-y^2} \\ &= \underbrace{\int_{-k}^k e^{-x^2} dx}_{I_k} \underbrace{\int_{-k}^k e^{-y^2} dy}_{I_k} = I_k^2 \end{aligned}$$

Confrontando con il precedente $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k^2 = \pi$, quindi ($I_k > 0$)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = \sqrt{\pi} \quad \text{MA} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Questo dimostra l'integrale gaussiano

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Esercizio 1 $\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



Caso fortunato

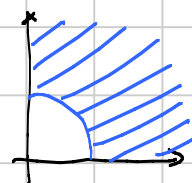
$$\frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{appena } y \leq 1$$

quindi

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy \geq \iint_B \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty \quad \uparrow \frac{1}{p^2}$$

Vale anche se il raggio è ≥ 1 : basta spezzare in 2.

Esercizio 2 $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



Ora la disug. non ci aiuta

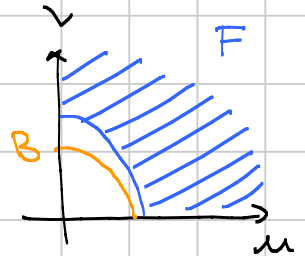
Slogan: cambiare variabile per PAREGGIARE GLI ESPONENTI

Pougo $x = u^2$, $y = v$. Devo calcolare J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto 2u = J$$

Allora $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \iint_F \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv$

Chi è F ? $E = x^2+y^2 \geq 1$ $F = u^4+v^2 \geq 1$
 $v \geq \sqrt{1-u^4}$



$$\iint_F \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \text{ converge} \Leftrightarrow \iint_B \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \text{ converge}$$

e converge perché è del tipo $\frac{1}{\rho^3}$

Detto rigorosamente: $\iint_B \frac{u}{u^4+v^4} du dv = \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho}_{\text{converge}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta}_{\text{numero perché è un integrale proprio perché}}$$

numero perché è un integrale proprio perché

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq m_0 > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

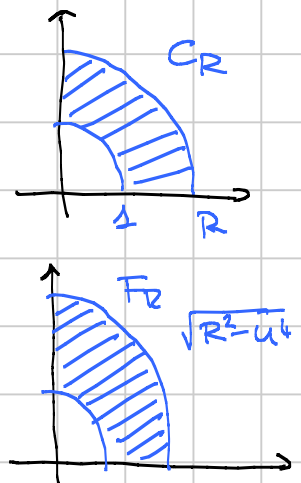
(funzione continua, ammette minimo, bla bla bla)

Qss. Ho fatto il cambio di variabili direttamente sull'integrale improprio. Il tutto avrebbe giustificato.
Il modo di farlo è standard

$$\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$$

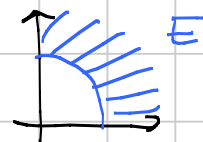
$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{F_R} \frac{2u}{u^4+v^4} du dv$$

$$= \iint_F \frac{2u}{u^4+v^4} du dv$$



(Ho usato l'indipendenza dal "modus invariabili").

Esempio 3 $\iint_E \frac{x^a}{x^2+y^4} dx dy$ per quali a converge



Paraggio gli esponenti $x=u^2, y=v \leadsto J=2u$

Diventa $\iint_F \frac{u^{2a}}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv \leadsto$ come prima $\frac{\rho^{1+2a}}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{3-2a}}$

Converge $\Leftrightarrow 3-2a > 2 \Leftrightarrow 2a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$

Esempio 4 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

$$\leq \frac{1}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{x^2}$$

↑
😊

Lo riposto in cartesiane

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^2+y^4} \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \underbrace{\int_0^{x^2} dy}_{x^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = 1$$