

INTEGRALI MULTIPLI IMPROPRI

Un integrale multiplo di d'ica IMPROPRIO se la zona di integrazione è non limitata e/o la funzione è non limitata.

Grossa differenza con Analisi 1

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a segno qualunque se

$$\int_A |f(x)| dx = +\infty$$

allora per definizione si pone l'integrale indeterminato senza indagare oltre (non è completamente vero).

In generale si pone $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ e si definisce
↑ ↑
parte posit. parte neg.

$$\int_A f(x) dx = \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx$$

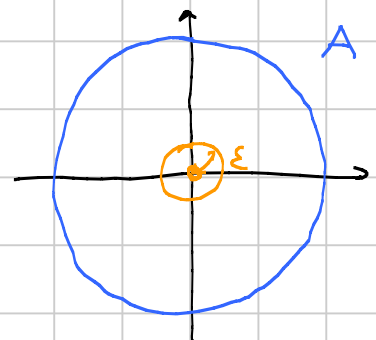
e si sviluppa la teoria solo per integrande ≥ 0 in A .

Quindi d'ora in poi ci limitiamo al caso $f(x) \geq 0$ in A .

Esempio 1 $\iint_A \underbrace{\frac{|x|}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} dx dy$

$A =$ cerchio con centro in $(0,0)$
e raggio 1.

Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ la $f(x,y)$ ha $\liminf 0$
e $\limsup +\infty$, dunque non è limitata
e l'integrale è improprio.



Definizione ovvia ma non troppo (problema in un solo p.to)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A_\varepsilon} f(x,y) dx dy$$

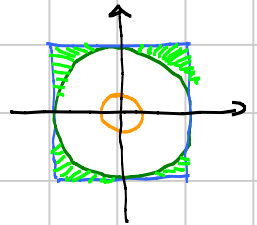
$\uparrow$
 A_ε = cerchio di raggio ε .

Per ogni $\varepsilon > 0$ l'integrale su A_ε ha senso (è proprio).
Tutto sta ad indagare l'esistenza del limite.

$$\iint_{A_\varepsilon} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cancel{p} |\cos\theta|}{\cancel{p}^2} \cdot \cancel{p} = 4 \int_\varepsilon^1 dp \rightarrow 4$$

Esempio 2 Stessa funzione su $Q = [-1,1] \times [-1,1]$

$Q_\varepsilon = Q \setminus \text{cerchio}$ e procediamo come prima



Osservazione comoda $\int_Q = \int_A + \int_{Q \setminus A}$

$\uparrow$
cerchio di prima

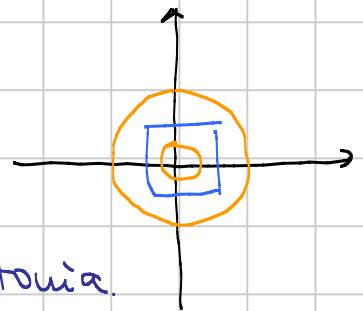
$\int_{Q \setminus A}$ integrale proprio, quindi un numero

$$\Rightarrow \int_Q \text{ converge a } \int_A \dots + \int_{Q \setminus A} \dots$$

Oss. tecnica Se $f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione, allora il limite fatto togliendo cerchi o quadrati o triangoli è lo stesso.

Idea: per ogni cerchio esiste un quadrato contenuto e viceversa.

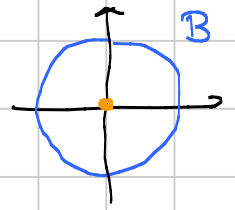
Inoltre il $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ esiste sempre per monotonia.



Esercizio: formalizzare il discorso.

Achtung! Se $f(x)$ ha segno variabile, posso ottenere risultati diversi togliendo figure diverse.
L'esempio si può fare.
Questo è il motivo per una teoria con integrale ≥ 0 .

Esempio classico $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy$



Per quali α converge?

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_\varepsilon} \dots \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^{2\alpha}} \cdot p \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dp}{p^{2\alpha-1}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{dp}{p^{2\alpha-1}} \end{aligned}$$

Analisi 1: questo converge $\Leftrightarrow 2\alpha-1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$

Occhio che per $\alpha=1$ il denominatore è quadratico.

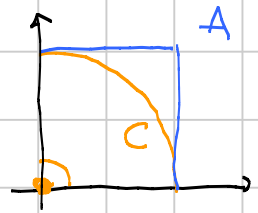
Stesso esempio in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \iiint_S \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha} dx dy dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{p^\alpha} p^2 \cos \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dp}{p^{\alpha-2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi}_{\text{Numero}} \\ &= \text{numero} \int_0^1 \frac{dp}{p^{\alpha-2}} \end{aligned}$$

e questo converge $\Leftrightarrow \alpha < 3$

Esempio $\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$ $A = [0,1] \times [0,1]$

Converge perché denum $\sim p$



$\iint_A$ converge $\Leftrightarrow \iint_C$ converge =

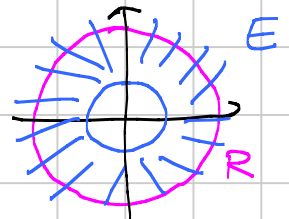
$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{p(\cos\theta + \sin\theta)} \cdot p = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$

Questo è un integrale proprio: infatti $\exists m > 0$ t.c.

$\cos\theta + \sin\theta \geq m \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(Infatti il LHS ha minimo per θ in un arco $\theta_0 \in \frac{\pi}{2}$ e in θ_0 non si possono annullare insieme $\cos\theta_0$ e $\sin\theta_0$)

Esempio (n+1) $\iint_E \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dx dy$



$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\text{Cotona}} \dots = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^\alpha} p$

$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dp}{p^{\alpha-1}}$ e questo converge $\Leftrightarrow$
 $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$

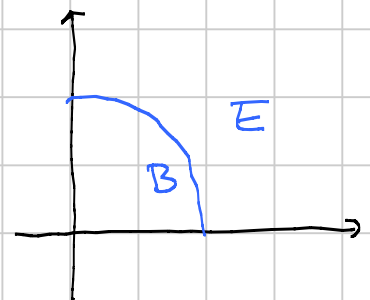
Esempio $\iint_Q \frac{\arctan x^3}{x^4+y^4} dx dy$

$Q := [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

ha 2 problemi quindi va spezzato

Su B localmente $f(x,y) \sim \frac{1}{p}$ quindi
 l'integrale converge (esponente < dim.)

Su E localmente $f(x,y) \sim \frac{1}{p^4}$ quindi
 converge



↑
 rigoroso: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x,y) \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in E$