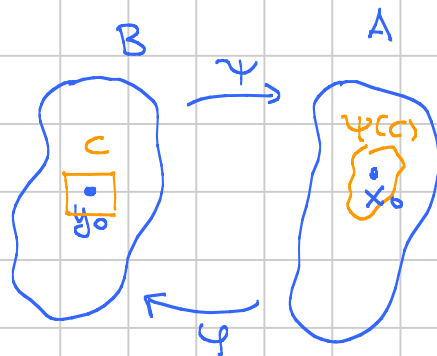


Back to cambio variabili

In modo standard si arriva al punto

"se vale la formula a meno di ε sui cubi piccoli, allora vale in generale"

Brutale: perché è vero sui cubi piccoli?



$$\int_A f_C(\psi(x)) |\text{Det } J_\psi(x)| dx =$$

$$= \int_{\psi(C)} |\text{Det } J_\psi(x)| dx$$

$$\sim \int_{\psi(C)} |\text{Det } J_\psi(x_0)| dx$$

$$= |\text{Det } J_\psi(x_0)| \underbrace{\text{meas}(\psi(C))}_S$$

$$= \text{meas}(J_\psi(x_0)(\psi(C)))$$

$$= \text{meas}(Q(C)) \quad \text{dove } Q = J_\psi(x_0) \circ \psi$$

$$\stackrel{(*)}{\sim} \text{meas}(C) = \int_B f_C(y) dy$$

[Se C è piccolo, allora $\psi(C)$ è piccolo, quindi
 $|\text{Det } J_\psi(x)| \sim |\text{Det } J_\psi(x_0)| \quad \forall x \in \psi(C)$]

[$\text{meas}(L(S)) = |\text{Det } L| \cdot \text{meas}(S)$
 per ogni L lineare]

$J_Q(y) = J_\psi(x_0) \cdot J_\psi(y)$ se $y = y_0$ allora $J_Q(y) = \text{Id}$, ma allora
 se C è piccolo $J_Q(y) \sim \text{Id}$, quindi
 Q moralmente è una traslazione.

— o — o —

Notazioni $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$C(y_0, s) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq s\}$
 $\uparrow$ cubo

Data una matrice M , si pone

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\sum_{j=1}^n |M_{ij}|}_{\leftarrow \text{somma sulla riga } i\text{-esima}}$$

LEMMA DEL CUBETTO ESTERNO

Dato un generico diffeomorfismo

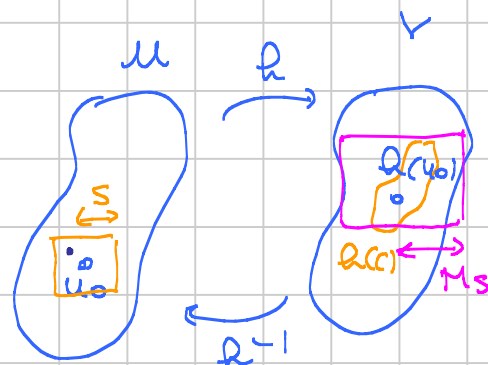
$$R: U \rightarrow V$$

(U e V sono aperti in $\mathbb{R}^n$)

e dato un cubo $C(u_0, s) \subseteq U$ vale la relazione

$$R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), Ms)$$

dove $M = \max_{u \in C(u_0, s)} \|J_R(u)\|$.



Dim. Si tratta di far vedere che

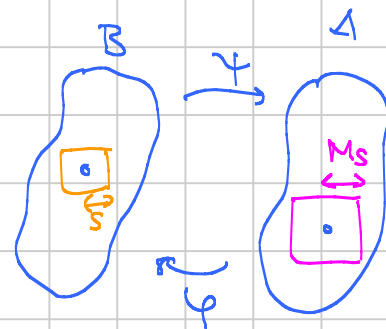
$$\|R(u) - R(u_0)\| \leq M \|u - u_0\| \text{ dove } M \text{ è definito come sopra} \leq Ms$$

La disuguaglianza segue da Lagrange (ved. les. 41)

Conseguenza 1 Applico il lemma con $R = \psi: B \rightarrow A$

Posto $\hat{M} := \sup_{y \in B} \|J_\psi(y)\|$ che suppongo finito

avremo che



$$\psi(C(y_0, s)) \subseteq C(\psi(y_0), Ms)$$

↑ indipendente dal cubo

[Abbiamo detto meglio: "se C è piccolo, allora $\psi(C)$ è piccolo"]

Conseguenza 2 Dalla conseguenza 1 segue che

$$\text{meas}^* (\psi(C(y_0, s))) \leq M^n \underbrace{\text{meas}(C(y_0, s))}_{(2s)^n}$$

* $s^* \pm$ sull'insieme

Dim. banale da sopra

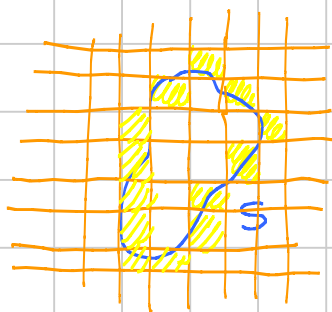
Conseguenza 3

↑ Esercizio

Se $S \subseteq B$ è misurabile, allora $\psi(S)$ è misurabile

Dim. S è misurabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ posso ricoprire ∂S con cubetti di misura totale $< \varepsilon$, cioè

$$\partial S \subseteq \bigcup_{i=1}^k C_i$$



Ma allora $\partial \psi(S) = \psi(\partial S) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \psi(C_i)$
↑ ψ è differenz. ↑ a sua volta contenuti in cubi di diametro un po' più grande

Allora $\partial \psi(S)$ è contenuta in cubi di misura totale $< M^n \varepsilon$, e quindi $\psi(S)$ è misurabile.

Oss. Grazie alla conseguenza 3 posso risparmiare un po' di integrali inferiori e superiori

Scelta della piccolezza dei cubi Scelgo $\delta > 0$ abbastanza piccolo in maniera tale che valgano 2 proprietà ($\varepsilon > 0$ è dato)

$$\rightarrow |\text{Det } J_\varphi(x_1)| \leq (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_2)| \quad \forall x_1, x_2 \text{ in } A \text{ con } \|x_1 - x_2\| \leq \hat{M}\delta$$

$$\rightarrow \|J_\varphi(\varphi(y_1)) J_\varphi(y_2)\| \leq (1+\varepsilon) \quad \forall y_1 \in B \quad \forall y_2 \in B \text{ con } \|y_1 - y_2\| \leq \delta$$

se $y_1 = y_2$ la matrice è l'identità e $\|Id\| = 1$

Queste due sono possibili se J_φ e J_ψ sono unif. continue

$$|\text{Det } J_\varphi(x_1)| \leq |\text{Det } J_\varphi(x_2)| + |\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)|$$

Divido per $|\text{Det } J_\varphi(x_2)|$ e ottengo

$$\frac{|\text{Det } J_\varphi(x_1)|}{|\text{Det } J_\varphi(x_2)|} \leq 1 + \frac{|\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)|}{|\text{Det } J_\varphi(x_2)|}$$

piccolo quanto voglio se x_1 e x_2 sono opp. vicini

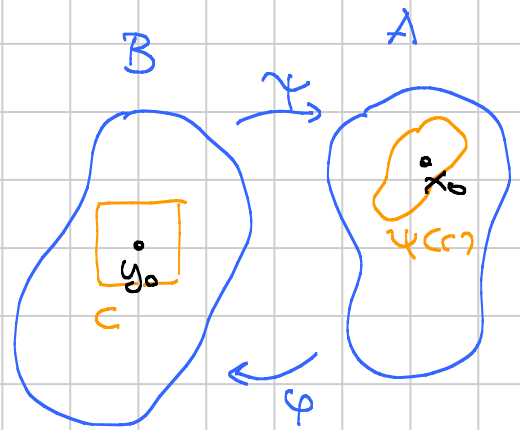
↑ assunto che in A questo $\geq$ costante positiva fissa

Esercizio Dimostrare altrettanto per bene (o meglio) che anche la seconda richiesta è possibile.

— o — o —

Gran finale: giustificazione del brutale iniziale per cubi $C(y_0, \delta)$ con $\delta \leq \delta$

$$\begin{aligned} & \int_A^* f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &= \int_{\varphi(C)}^* |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\leq (1+\varepsilon) \int_{\varphi(C)}^* |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx \\ &= (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \text{meas}^*(\varphi(C)) \\ &= (1+\varepsilon) \text{meas}(J_\varphi(x_0)(\varphi(C))) \quad \leftarrow \text{proprietà appl. lineari} \\ &= (1+\varepsilon) \text{meas}(Q(C)) \quad \text{con } Q = J_\varphi(x_0) \circ \varphi \\ &\leq (1+\varepsilon) \underbrace{(1+\varepsilon)^m}_{\mu^m} \text{meas}(C) \\ &= (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B f_C(y) dy \end{aligned}$$



ho usato che $\|x - x_0\| \leq \hat{M}\delta \leq \hat{M}\delta$
più la prima propr di δ ($x \in \varphi(C)$)

Ho usato che $J_\varphi(y) = J_\varphi(x_0) J_\psi(y)$
più la seconda proprietà di δ

Mettendo insieme abbiamo ottenuto

$$\int_B f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A^* f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Resterebbe da ottenere la disuguaglianza opposta.
Quella si fa allo stesso modo partendo da

LEMMA DEL CUBETTO INTERNO

$R: U \rightarrow V$ diffeom.
 $C(u_0, s) \subseteq U$

Allora

$$R(C(u_0, s)) \supseteq C(R(u_0), \frac{s}{M})$$

con M opportuna

Dim. Esercizio (molto meno banale di quanto sembra).
Capire perché non posso fare R^{-1} a dx e sx, il che
banalizzerebbe la cosa. $\square$

— o — o —

Oss. Abbiamo dimostrato il teorema

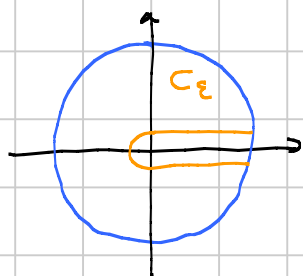
$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

con integrali inferiori e superiori assumendo

- $\varphi: A \rightarrow B$ e $\psi(B) \rightarrow A$ una l' inversa dell'altra
- J_φ e J_ψ esistono e sono unif. continue in A/B
- $|\text{Det } J_\varphi| \geq a_0 > 0$ in A e $|\text{Det } J_\psi| \geq b_0 > 0$ in B .

Quindi non vale per le polari 😞 : ① perché $J = \rho$ si può annullare
annullare
② $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ si ricolano
ricollano

Come se ne esce?



C_ε = cerchio meno perfetto

Su C_ε posso usare la formula e poi
passo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$

— o — o —