

CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

- ROAD MAP :
- ① Se vale per i cubi con integrali veri per una classe di trasformazioni chiusa rispetto all'inversa, allora vale in generale
 - ② Se vale per i cubi piccoli a meno di ε (da specificare), allora vale per i cubi
 - punto vero $\rightarrow$ ③ Vale per i cubi piccoli a meno di ε

① La teoria degli integrali con SF costruite usando i rettangoli coincide con la teoria fatta a partire dai cubi.

"Dem" 1° passo Posso fare la teoria usando solo rettangoli ad estremi razionali

estremi reali

estremi in $\mathbb{Q}$



Nelle zone "interne" non modifica la step function.

Nelle zone "ai bordi" la posso $\pm M$, dove M è la costante che limita la funzione.

In termini di integrale la diff può essere una piccola.

2° passo I rettangoli ad estremi razionali sono unione di cubi.

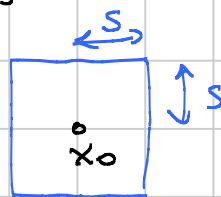
— o — o —

2) Notazione

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Si definisce $C(x_0, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq s\}$

↑
cubo con centro in x_0
e semilato s



Supponiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ cubo $C(y_0, s) \subseteq B$
con $s \leq \delta$ vale la formula

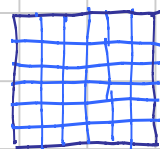
$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A \dots \leq \int_B f_C(y) dy \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

↑ vale a meno di ε sui cubi piccoli (di semilato $s \leq \delta$)

Allora vale su tutti i cubi senza l' ε .

Dim. Preso un cubo C grande, fisso $\varepsilon > 0$ e scrivo C come
unione di cubi piccoli (rispetto ad ε) essenzialmente
disgiunti (senza parti comuni in comune)

$$C = \bigcup_{i=1}^k C_i$$



$$\text{Ma allora } f_C(y) = \sum_{i=1}^k f_{C_i}(y)$$

Uso la linearità a LHS, CHS, RHS e ottengo

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A \dots \leq \int_B f_C(y) dy \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Poiché vale per ogni $\varepsilon > 0$ facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ho la
tesi.

— o — o —

Cubi e diffeomorfismi Sia $R: U \rightarrow V$ un diffeomorfismo.
Sia

$R^{-1}: V \rightarrow U$ la sua inversa.

Come posso stimare $\|R(u_1) - R(u_2)\|$?

Uso Lagrange sulle singole componenti

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| = \langle \nabla R_i(\theta_i), u_1 - u_2 \rangle = \langle \text{vettore}, \text{vettore} \rangle$$

$$|\langle v, w \rangle| = |v_1 w_1 + \dots + v_m w_m| \leq |v_1| \cdot |w_1| + \dots + |v_m| \cdot |w_m| \\ \leq (|v_1| + \dots + |v_m|) \|w\|$$

Quindi

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| \leq \|u_1 - u_2\| \cdot \text{somma elementi della riga } i\text{-esima di } J_R$$

Questa vale per ogni i , quindi

$$\|R(u_1) - R(u_2)\| \leq \max_{u \in U} \|J_R(u)\| \cdot \|u_1 - u_2\|$$

dove $\|J\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|\text{riga } i\text{-esima}\|$

$$\begin{pmatrix} |*|+|*|+|*| \\ |*|+|*|+|*| \\ |*|+|*|+|*| \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \\ \rightarrow R_3 \end{matrix} \\ \downarrow \max \\ \|J\|$$

Data una matrice J :

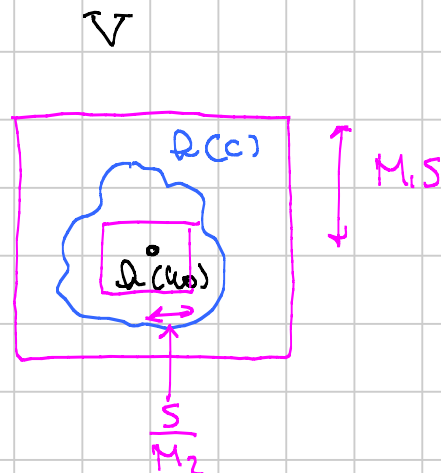
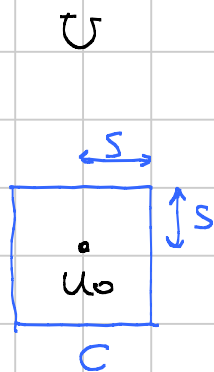
$$\|Jx\| \leq \|J\| \cdot \|x\|$$

$\uparrow$ max comp. $\uparrow$ max comp. $\uparrow$ max somma riga

Aggiunto dopo video! da qui in poi è fatto forse meglio alla LEZ. successiva

Lemna dei cubetti Se $R: U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo, allora esistono 2 costanti M_1 ed M_2 t.c.

$$C(R(u_0), \frac{s}{M_2}) \subseteq R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), M_1 s)$$



La cosa non ovvia è che M_1 ed M_2 non dipendono dal cubo in partenza, ma solo da $\mathcal{Q}$.

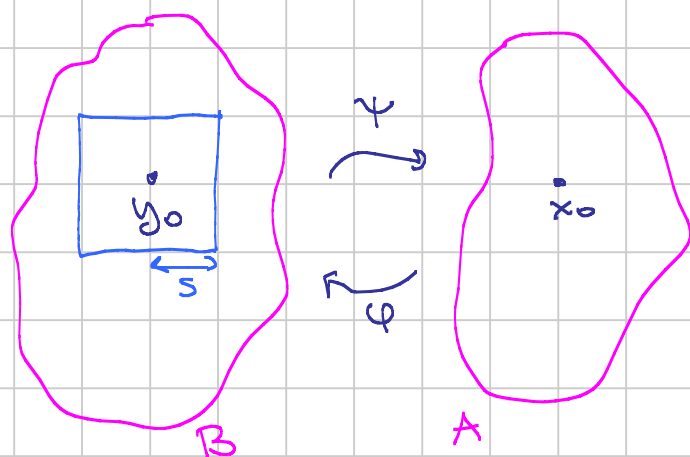
In particolare posso prendere

$$M_1 := \sup \{ \|J_{\mathcal{Q}}(u)\| : u \in U \}$$

$$M_2 := \sup \{ \|J_{\mathcal{Q}^{-1}}(v)\| : v \in V \}$$

Dato per buono il Lemma, dimostriamo che la formula vale a meno di ε per i cubi piccoli.

Dim. Uso il lemma usando $\mathcal{Q}(y) = J_{\varphi}(x_0)(\varphi(y))$



↑
non sto tornando indietro,
ma quasi

$$J_{\mathcal{Q}}(y) = J_{\varphi}(x_0) \cdot J_{\varphi}(y)$$

Per $y = y_0$ è la matrice identica, quindi se s è abbastanza piccolo $J_{\mathcal{Q}}(y)$ è vicina all'identità, quindi $\|J_{\mathcal{Q}}(y)\|$ e $\|J_{\mathcal{Q}^{-1}}(y)\|$ sono vicine a 1.

Prendiamo la piccolezza in modo che M_1 ed M_2 siano $\leq 1+\varepsilon$. Allora

$$R(C(y_0, s)) \subseteq C(R(y_0), (1+\varepsilon)s) \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} \text{meas}(R(C(y_0, s))) &\leq \text{meas}(C(R(y_0), (1+\varepsilon)s)) \\ &= 2^m \cdot (1+\varepsilon)^m s^m \end{aligned}$$

$$\text{meas}(J_\varphi(x_0) \cap C(y_0, s))$$

$$= |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C(y_0, s)))$$

la misura

A questo punto

$$\int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx = \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\stackrel{\sim}{=} \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx$$

$$= |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C))$$

$$\leq (1+\varepsilon)^m \cdot 2^m \cdot s^m$$

$$= (1+\varepsilon)^m \cdot \text{meas}(C)$$

$$= (1+\varepsilon)^m \cdot \int_B f_C(y) dy$$

Preciso il passaggio $\sim$. Voglio dire che $|\text{Det } J_\varphi(x)| \sim |\text{Det } J_\varphi(x_0)|$ se x è vicino a x_0 . Per scegliere il cubo iniziale abbastanza piccolo, a meno che

$$|\text{Det } J_\varphi(x)| \leq |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot (1+\varepsilon)$$

e questo sostituito porta alla formula

$$\int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B f_C(y) dy$$

che è una delle 2 che volevo.