

CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Def. Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$. Si dice **DIFFEOMORFISMO** tra A e B una qualunque funzione $\varphi: A \rightarrow B$ di classe C^1 con inversa $\psi: B \rightarrow A$ pure di classe C^1 .

Oss. La matrice jacobiana $J_\varphi(x)$ è invertibile in ogni p.to $x \in A$ e idem per $J_\psi(x)$ per $x \in B$. Inoltre per il te. delle funzioni composte

$$J_\psi(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) = \text{Id} \quad \forall x \in A$$

$$J_\varphi(\psi(x)) J_\psi(x) = \text{Id} \quad \forall x \in B$$

Teorema Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeomorfismo.

Sia $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata con supporto compatto $K \subseteq B$ (cioè $f(x) = 0$ per ogni $x \notin K$).

Allora

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

e idem per gli integrali inferiori.

Oss. In un certo senso generalizza il cambio di variabili di analisi 1:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\varphi: \underset{A}{[a, b]} \rightarrow \underset{B}{[\varphi(a), \varphi(b)]}$$

Non c'è il valore assoluto, ma gli estremi

possono venire "scambiati". Ad analisi 1 φ non era per forza invertibile.

Oss. Visto che abbiamo usato $\int^*$ e $\int_*$ la formula vale sempre.
 Inoltre la funzione al LHS è integrabile $\Leftrightarrow$ lo è quella
 al RHS ed in tal caso vale tutto con integrali veri.
 — o — o —

ROAD MAP

- (1.1) La formula si comporta bene per composizione
 - (1.2) Se vale per i rettangoli (cioè f è la funzione
 caratt. di un rett. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$), e
 vale con integrali veri, allora vale sempre
 - (2.1) La formula vale se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una
 trasformazione affine speciale
 - (2.2) Vale per le trasformazioni affini in generale
- FINE PRIMA PARTE

1.1 Siano $\varphi_1: A \rightarrow B$ e $\varphi_2: B \rightarrow C$. Se vale per φ_1 e φ_2 ,
 allora vale per $\varphi_3: A \rightarrow C$ definita da $\varphi_3(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

Dim. Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ammissibile. Allora

$$\int_C^* f(z) dz = \int_B^* \overbrace{f(\varphi_2(y)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi_2}(y)|}^{\hat{f} \text{ su } B} dy$$

↑
vale per φ_2

$$= \int_A^* f(\varphi_2(\varphi_1(x))) \cdot |\text{Det } J_{\varphi_2}(\varphi_1(x))| \cdot |\text{Det } J_{\varphi_1}(x)| dx$$

↑
vale
per φ_1

$$= \int_A^* f(\varphi_3(x)) \underbrace{|\text{Det } J_{\varphi_3}(x)|}_{\text{Funzione composta}} dx$$

e idem per gli integrali inferiori.

— o — o —
 ↑ con int. veri

1.2 Se vale per i rettangoli per ogni φ appartenente ad una
 classe di trasformazioni chiusa rispetto al passaggio
 all' inversa, allora vale per tutte le f per tutte le
 trasformazioni della classe.

Dim. Step 1 Se vale per i rettangoli con integrali veri, allora vale per le step functions, sempre con integrali veri.

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \quad f_R(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in R \\ 0 & \text{se } y \notin R \end{cases}$$

$I_1(f) = \text{LHS}$, $I_2(f) = \text{RHS}$ sono applicazioni lineari definite su SF e coincidono in una base, quindi coincidono ovunque. Qui serve che siano integrali veri.

Step 2 Se vale sulle SF, allora prendo una f qualunque e prendo una qualunque SF $g \geq f$ in B (g nulla fuori da B)
Allora

$$\begin{aligned} \int_B g(y) dy &= \int_A \underbrace{g(\varphi(x))}_{\geq f(\varphi(x))} \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \end{aligned}$$

Fatto generale: se $g_1 \geq g_2$ e g_1 è integrabile, allora $\int g_1 \geq \int^* g_2$

Facendo l'inf. su tutte le $g \geq f$ ottengo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx = (\star)$$

Step 3 Ora abbiamo assunto che tutto ciò valga non solo per φ , ma anche per la sua inversa $\psi: B \rightarrow A$. Ma allora

$$(\star) \geq \int_B^* \underbrace{f(\varphi(\psi(x)))}_x \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(\psi(x))| \cdot |\text{Det } J_\psi(x)|}_1 dx = \int_B^* f(x) dx$$

Quindi sono tutte uguali.
— 0 — 0 —

2.1 Trasf. affini speciali

(A) Traslazioni : è banale che vale per i rettangoli, sono stabili per inversa, quindi vale per le traslazioni

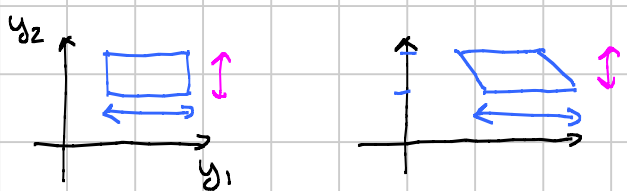
(B) Scambi di coordinate : $M_{ij}(x_1, \dots, x_n) =$ scambiare x_i e x_j
Per queste vale banalmente sui rettangoli, ognuna è l'inversa di se stessa, quindi per queste vale

(C) Dilatazione sulla prima coord. : $M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$

Vale per i rettangoli perché il $|\det| = |\lambda|$ compensa il cambio di "volume" del rettangolo. La classe è chiusa per inversa, quindi anche qui vale per ogni funzione.

(D) Somma prime due coordinate $S(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$
 $|\det S| = 1$. L'effetto su un rettangolo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbb{R}}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbb{R}}(\varphi(x)) dx$$



Ancora una vale per i rettangoli, dunque vale in generale perché l'inversa è dello stesso tipo.

2.2 Trasformazioni affini generali

Ogni trasformazione affine è composizione di trasformazioni di tipo (A), (B), (C), (D) (Lemma di algebra lineare).

Grazie al pto 1.1 se vale per le singole trasformazioni vale anche per la composizione.

Corollario Sia $\varphi(x) = Lx$ una trasformazione lineare.
Sia $S \subseteq B$ un insieme misurabile
Allora

$$\int_B f_S(y) dy = \int_A f_S(\varphi(x)) |\det L| dx$$

$$\varphi: A \rightarrow B$$

$$\psi: B \rightarrow A$$

$$\overset{||}{\text{meas}(S)} = |\det L| \text{meas}(\psi(S))$$

Questo dice come si trasforma la misura degli insiemi.

Analogamente, dato un insieme $K \subseteq A$ misurabile

$$\text{meas}(\varphi(K)) = |\det L| \text{meas}(K)$$

Dim. Basta usare la riga di sopra con $S = \varphi(K)$

— o — o —