

Piccolo commento sulle formule di riduzione

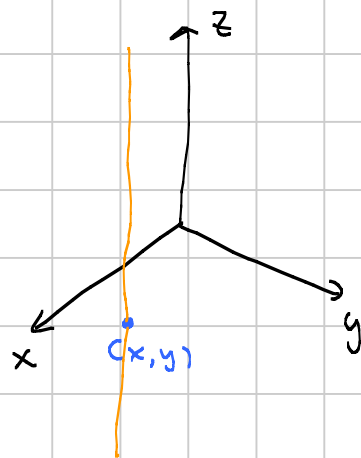
Per esempio prendiamo la  $3 = 2 + 1$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z) dz \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* dx dy \int_{\mathbb{R}}^* f(x, y, z) dz \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

volendo potrei definire

$$c_*(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z) dz$$

$$c^*(x, y) = \int_{\mathbb{R}}^* f(x, y, z) dz$$



Con queste notazioni posso riscrivere

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f \leq \iint_{\mathbb{R}^2} c_*(x, y) \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* c^*(x, y) \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f$$

Questa formula vale per ogni  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e nulla fuori da un limitato.

Se suppongo che per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  valga  $c_*(x, y) = c^*(x, y)$ , e che  $f(x, y, z)$  sia integrabile su  $\mathbb{R}^3$ , allora

→ la funzione  $c(x, y)$  è integrabile su  $\mathbb{R}^2$

→ valgono tutti gli = nella formula.

La formula generale si dimostra come in  $\mathbb{R}^2$ , cioè

→ si osserva che è banale per i parallelepipedi con lati // assi

→ si estende per linearità alle SF

→ nel caso generale si considera  $SF \geq f$  e  $SF \leq f$  e si fa sup e inf.

La formula per sezioni è la stessa cosa

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f \leq \int_{\mathbb{R}} S_*(z) dz \leq \int_{\mathbb{R}}^* S^*(z) dz \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f$$

dove

$$S_*(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y, z) dx dy$$

$$S^*(z) = \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x, y, z) dx dy$$

Quando abbiamo integrali su  $\mathbb{R}^n$  abbiamo formule analoghe del tipo  $n = k + (n-k)$ .

Teorema della media integrale

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sia  $r > 0$ , e sia  $f: \overline{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ . ↙ chiusa

Supponiamo  $f$  continua in tutto l'insieme.

Allora esiste almeno un p.to  $c \in \overline{B}_r(x_0)$  t.c.

$$\int_{\overline{B}_r(x_0)} f(x) = f(c) \cdot \underbrace{\text{meas}(\overline{B}_r(x_0))}_{= \int_{\overline{B}_r(x_0)} 1}$$

Dim. (stessa di Analisi 1) Sia  $m$  ed  $M$  il min e max di  $f$  nella palla (esistono per W.). Allora

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{B}_r(x_0)$$

Per monotonia e linearità dell'integrale

$$m \int_B 1 \leq \int_B f \leq M \int_B 1 = \text{meas}(B)$$

Ma allora  $m \leq \frac{1}{\text{meas}(B)} \int_B f \leq M$ . Visto che  $f$  è

continua e  $B$  è convessa esiste un p.to t.c.  $f(c) =$

Oss. Non è importante essere in  $\overline{B}_r(x_0)$ , ma basta un compatto, connesso, misurabile.

Oss. La media integrale è il valore che dovrebbe avere una funzione costante per avere lo stesso integrale di  $f(x)$ .

**MOMENTO D'INERZIA** (Di una figura piana / solida rispetto ad un asse)

Per definizione è

$$\int_F \text{dist}^2(x, \text{asse}) dx$$

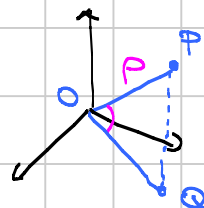
assumendo densità costante

doppio o triplo a seconda dei casi

$$\int_F \rho(x) \cdot \text{dist}^2(x, \text{asse}) dx$$

Esempio 1 Calcolare momento di inerzia di una sfera rispetto ad un asse passante per il centro.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad \text{Asse } z$$



$$\iiint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\text{dist}^2 \text{ dall'asse } z} dx dy dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho^2 \cos^2 \varphi}_{x^2 + y^2} \cdot \underbrace{\rho \cos \varphi}_J$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^3 \varphi}_{\text{un passaggio per parti}}$$

Esempio 2 Momento d'inerzia di un cilindro rispetto all'asse.

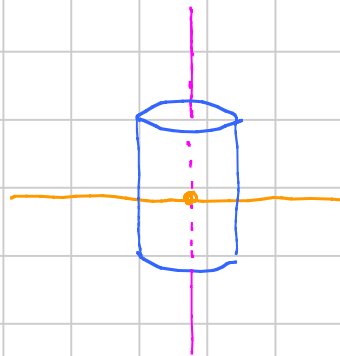
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq R\} \quad \text{asse } z$$

$$\iiint_C (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \rho^2 \cdot \rho =$$

↑  
cilindriche

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R dz}_R = \frac{1}{2}\pi R^4 R$$

Esempio 3 Momento di un cilindro rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare all'asse del cilindro stesso.



$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, -\frac{R}{2} \leq z \leq \frac{R}{2}\}$$

Così il centro è nell'origine e posso usare l'asse  $x$

$$\iiint_C \underbrace{(y^2 + z^2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{distanza}^2 \text{ del generico} \\ \text{p.to } (x, y, z) \text{ dall'asse } x}} dxdydz = \underbrace{\int_0^R d\rho}_{\substack{\uparrow \\ \text{cilindriche}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{cilindriche}}} \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz}_{\substack{\uparrow \\ \text{cilindriche}}} \underbrace{(p^2 \sin^2 \theta + z^2)}_{y^2 + z^2} \underbrace{\rho}_{\substack{\uparrow \\ \text{cilindriche}}}$$

Lo spezzo in 2 integrali

$$\underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz}_R = \frac{\pi}{4} R^4 R$$

$$\underbrace{\int_0^R \rho d\rho}_{\frac{1}{2}R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} z^2 dz}_{\frac{1}{3} 2 \frac{R^3}{8}} = \frac{\pi}{12} R^2 R^3$$

— 0 — 0 —

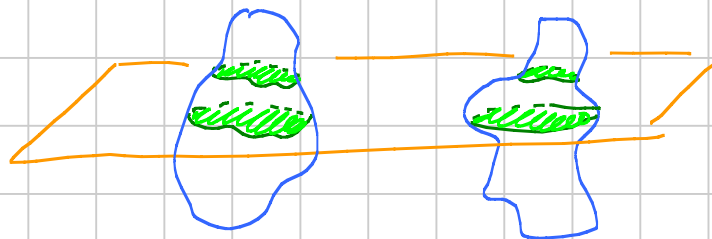
## PRINCIPIO DI CAVALIERI

In versione  $\mathbb{R}^3$ : due figure solide che determinano sezioni di area uguale rispetto ad una stessa famiglia di piani paralleli hanno lo stesso volume.

[Dim: calcolo del volume per sezioni]

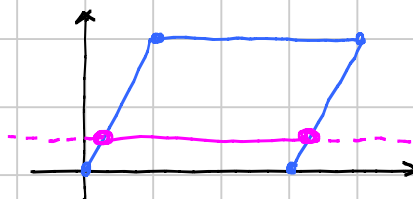
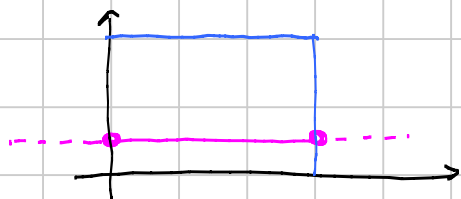
$$\text{Vol}(S) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\substack{\text{se le aree sono uguali,} \\ \text{i volumi sono uguali}}} dz$$

Preliminarmente, ho sistemato gli assi in modo che i piani paralleli siano quelli  $z = x$ ]



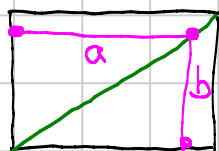
In  $\mathbb{R}^2$  vale lo stesso discorso, solo con la lunghezza delle sezioni.

### Esempio



Tutte le sezioni con rette  $\parallel$  asse  $x$  hanno la stessa lunghezza.

Oss. È importante che sia la STESSA famiglia di piani o rette parallele.



$a > b$  per ogni pto della diagonale