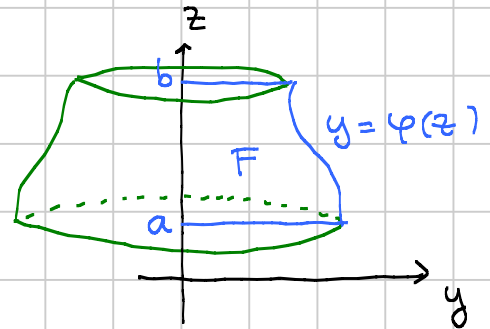


SOLIDI DI ROTAZIONE

Figura F nel piano yz che ruotando intorno all'asse z descrive un solido S .



Nel caso nel disegno

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

descrive il profilo della figura F

Descrizione del solido S :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, 0 \leq \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{distanza dall'asse } z} \leq \varphi(z)\}$$

In coordinate cilindriche diventa

$$a \leq z \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \varphi(z)$$

Se ci interessa solo la sup. laterale, l'eq. è $\sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(z)$

Esempio

$$x^2 + y^2 + z^4 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 8 - z^4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8 - z^4} \\ \varphi(z)$$

Solido rot.
intorno asse z

$$x^2 + y^4 + z^2 = 8$$

$$x^2 + z^2 = 8 - y^4$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{8 - y^4}$$

Solido rotat.
intorno asse y

$$x^4 + y^4 + z^2 = 8$$

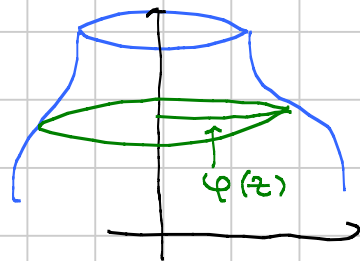
No solido
di rot.

Volume di un solido di rotazione

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z) \}$$

1° modo Per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$



$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

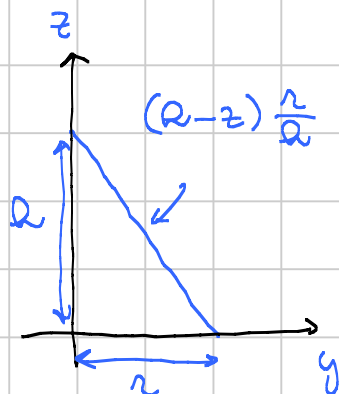
2° modo Coord. cilindriche

$$\begin{aligned} \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(z)} \rho \, d\rho &= \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \, \varphi^2(z) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

Esempio Volume cono $\varphi(z) = \frac{r}{R} (R-z)$

$$\text{Vol}(\text{cono}) = \int_0^R \frac{r^2}{R^2} (R-z)^2 \, dz \cdot \pi$$

$$= \text{controllare che venga } \frac{1}{3} \pi r^2 R$$



BARICENTRI E MOMENTI D'INERZIA

Def. Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice **BARICENTRO** di A il punto $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

valor medio della coordinata x in A

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

valor medio di y in A

Oss. Se approssimiamo una figura con tanti quadratini e facciamo il baricentro dei centri dei quadratini, sto costruendo le somme di Riemann per i 2 integrali.

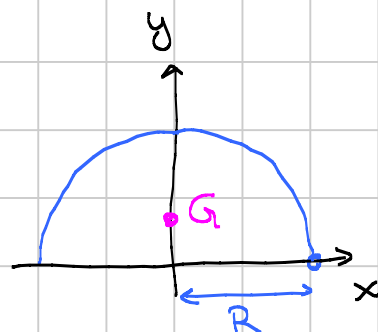
Def In $\mathbb{R}^3$ è analogo, solo che ho 3 coordinate e divido per il Volume

Esempio 1 Baricentro di una semicirconferenza

$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} R^2$$

$x_G = 0$ per simmetria

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \cdot p \\ &= \underbrace{\int_0^R p^2 dp}_{\frac{1}{3} R^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$



$$\text{Quindi } y_G = \frac{\iint y}{\text{Area}} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3\pi} R$$

Oss. Se ho densità $\rho(x,y)$ variabile, allora

$$x_G := \frac{\iint_A \rho(x) \cdot x \, dx \, dy}{\iint_A \rho(x) \, dx \, dy}$$

$y_G :=$ stessa cosa

Esempio 2 Baricentro della semisfera $x_G = y_G = 0$

$$\text{Volume} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho \sin \varphi}_z \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J \\ &= \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} R^4 \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{4} R^4}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{2\pi}_{2\pi} \underbrace{\left[-\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } z_G = \frac{\pi}{4} R^4 \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

$$\text{Confronto con semicerchio} \quad \frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi} \Leftrightarrow 9\pi < 32$$

Il baricentro della semisfera sta sotto quello della semicirconf.

TEOREMA GULDINO 1

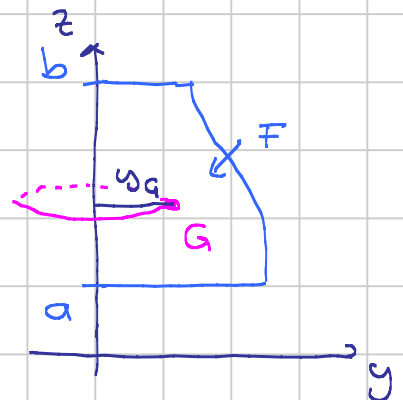
Il volume di un solido di rotazione è uguale all'area della figura che ruota moltiplicata per la lunghez. della circ. descritta dal baricentro della figura durante la rotazione.

Dim. Devo dimostrare che

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$\text{Calcolo } y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy \, dz$$

$$\text{quindi devo dim che } \text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$



Ma

$$\iint_F y \, dy \, dz = \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy = \int_a^b dz \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Quindi ci sono ridotto a $\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$

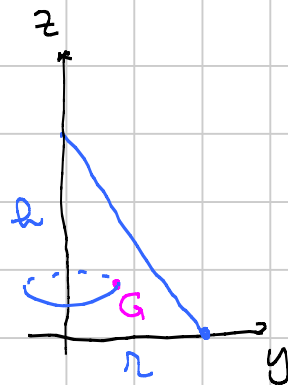
che è la formula trovata all'inizio.

Esempi

① Cono : $\text{Area}(F) = \frac{1}{2} R r$

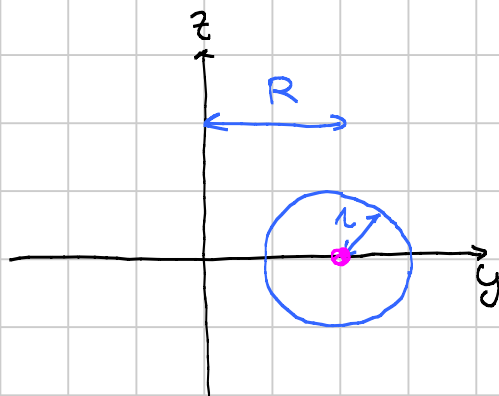
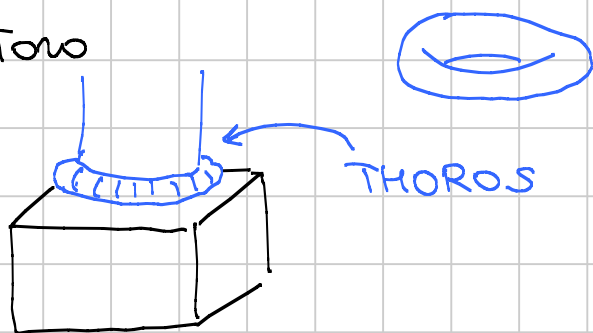
Baricentro : $G = \left(\frac{1}{3} r, \frac{1}{3} R \right)$

Volume = $\underbrace{\frac{1}{2} R r}_{\text{Area}} \cdot 2\pi \frac{1}{3} r = \frac{1}{3} \pi r^2 R$



② Sfera e cilindro vengono facili.

③ Toro



$\text{Vol}(\text{Toro}) = \underbrace{\pi r^2}_{\text{area}} \underbrace{2\pi R}_{2\pi y_G} = 2\pi^2 r^2 R$

Oss. Guldino 1 vale per qualunque figura F contenuta nel semipiano $y \geq 0$