

COORDINATE CILINDRICHE (in $\mathbb{R}^3$)

(x, y, z) cartesiane

(ρ, θ, z) cilindriche
 quota
 polari corrispondenti a x e y

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z$$

Esempio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, |z| \leq 4\}$
 in coord. cilindriche diventa

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad -4 \leq z \leq 4$$

Negli integrali

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

$\uparrow$ Descrizione di A in coord. cilindriche
 $\uparrow$ $J = \text{pagamento}$

COORDINATE SFERICHE

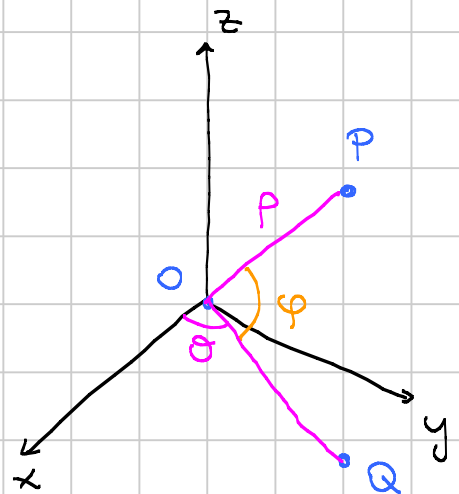
Coord. sferiche (alla moda dei geografi).

Dato $P \in \mathbb{R}^3$, si definisce Q come la proiezione di P sul piano xy e poi si definisce

$\rightarrow \rho = \text{lunghezza di } OP \quad (\rho \geq 0)$

$\rightarrow \varphi = \text{angolo tra } OP \text{ e } OQ \text{ (angolo tra } OP \text{ e piano } xy) \quad (\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

$\rightarrow \theta = \text{"}\theta \text{ di } Q\text{"} = \text{angolo tra } OQ \text{ e semiasse } x > 0 \quad (\theta \in [0, 2\pi])$



Interpretazione geografica:

→ φ è la LATITUDINE di P

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

→ θ è la LONGITUDINE di P

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Casi particolari:

→ L'origine ha $\rho=0$ e θ e φ con poco senso

→ i p.ti dell'asse z che hanno $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oppure $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ e θ non definito.

Formule di passaggio:

$$z = \rho \sin \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$z = PQ = OP \cdot \sin \varphi$$

$$x = OQ \cdot \cos \theta = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = OQ \cdot \sin \theta = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

In conclusione

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

Viceversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

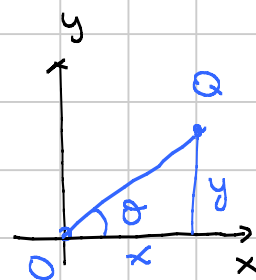
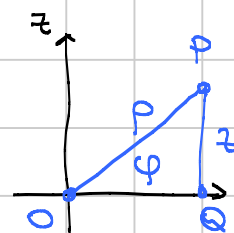
Determinante J da usare negli integrali.

Si parte dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix}$$

esercizio

$$\leadsto \text{Det} = \rho^2 \cos \varphi$$



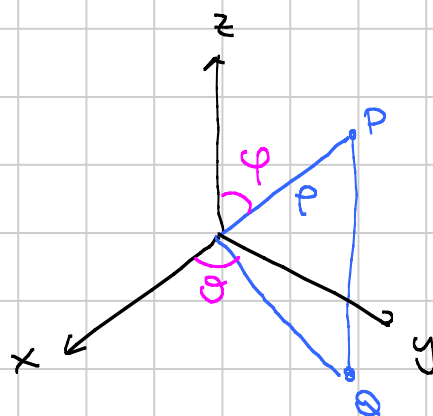
Formula per gli integrali

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \dots) \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$\uparrow$
Descrizione di A in coord. sferiche

Achtung! Molti (in particolare i fisici) usano un'altra convenzione per la sferiche con

→ φ = angolo tra OP e semiasse positivo delle z



Conseguenze

→ φ varia in $[0, \pi]$

→ nelle formule si scambiano $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$

Esempio 1 $\iiint_S z^2 dx dy dz$

S = sfera con centro in O e raggio 2

$$= \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi}_{\text{sfera in coordinate sferiche}} \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{z^2} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^4 d\rho}_{\frac{32}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}} = \frac{128}{15} \pi$$

Esempio 2

$$\iiint_S x^2 dx dy dz$$

è uguale per simmetria, ma il calcolo con la formula sarebbe più complicato (c'è anche θ)

Cambio di variabili in generale: funziona come in $\mathbb{R}^2$ solo che il Det della fone è 3×3 .

Esempio 3 $\iiint_S y^2 dx dy dz$ $S =$ sfera di raggio 2 e centro in $(5, 3, 4)$

Equazione sfera: $\underbrace{(x-5)}_u^2 + \underbrace{(y-3)}_v^2 + \underbrace{(z-4)}_w^2 \leq 4$

$\iiint_S y^2 dx dy dz = \iiint_{S'} (v+3)^2 du dv dw$ J=1 perché è una trasformazione

$\downarrow$
 S'
 $\downarrow$
sfera $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$

$= \iiint_{S'} (v^2 + 6v + 9) du dv dw = \frac{128}{15} \pi + \frac{9 \cdot 32}{3} \pi$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\frac{128}{15} \pi \quad 0 \quad 9 \cdot \text{Vol}(S') = 9 \cdot \frac{4}{3} \pi 2^3$

Esempio 4 Volume della sfera di raggio R $= \iiint_S 1 dx dy dz$

1° modo Coord. sferiche

$\int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dp \cdot 1 \cdot p^2 \cos p = \underbrace{\int_0^R p^2 dp}_{\frac{1}{3} R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos p dp}_2$

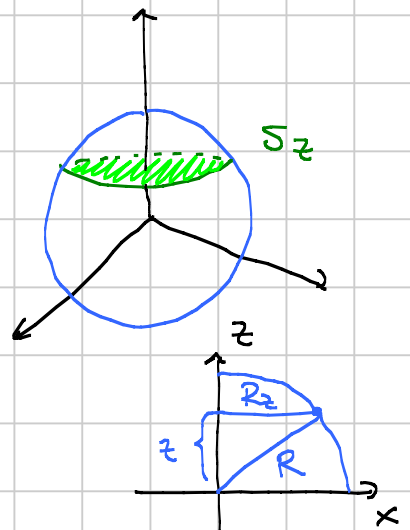
$= \frac{4}{3} \pi R^3$

2° modo Per sezioni

$\int_{-R}^R dz \underbrace{\iint_{S_z} 1 dx dy}_{\text{Area}(S_z)} = \int_{-R}^R \text{Area}(S_z) dz$

$= \int_{-R}^R \pi R_z^2 dz$

$= \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \text{si conclude}$



3° modo Proviamo per colonne.

$$\text{Base} = \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

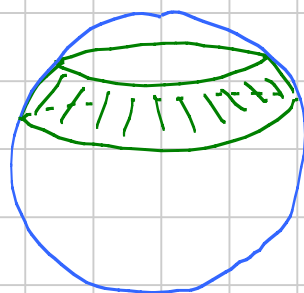
Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}} 1 \, dz = 2 \iint_{\Omega} dx \, dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ &= 2 \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{R^2 - \rho^2} \quad \underset{\uparrow}{\int} \rho = \rho \\ &= 4\pi \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} \, d\rho \\ &= 4\pi \left[\frac{2}{3} [R^2 - \rho^2]^{3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^R \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Esempio 5 Segmento sferico $\{(x, y, z) \in S : a \leq z \leq b\} = S_{a,b}$

Per sezioni promette bene

$$\begin{aligned} \iiint_{S_{a,b}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\ &= \pi \int_a^b R_z^2 \, dz \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \pi \left\{ R^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right\} \end{aligned}$$



Casi speciali : $a=0$ e $b=R \rightsquigarrow \pi \left\{ R^3 - \frac{1}{3}R^3 \right\} = \frac{2\pi}{3} R^3$
 $a=-R$ e $b=R \rightsquigarrow$ tutta la sfera.