

Formula di riduzione $3 = 1+2$

Integrazione per SEZIONI

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x,y,z) dx dy$$

dove

→ $[a,b]$ è l'insieme in cui varia z in A → S_z è la sezione di A ad altezza z , cioè

$$S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$$

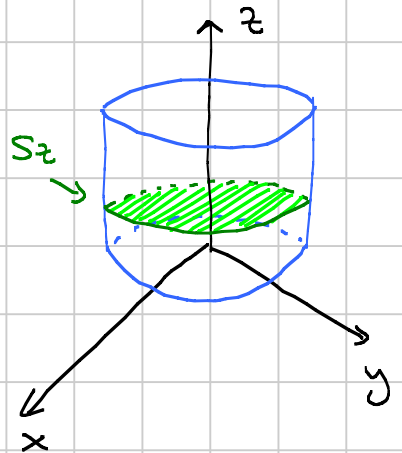
Esempio 1 Esercizio della lezione precedente con $f(x,y,z) = z$
 e $A = \text{cilindro} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \quad z$$

$$= \int_0^3 z dz \iint_{S_z} dx dy$$

$$= \int_0^3 dz \quad z \cdot \text{Area}(S_z) \quad \text{cerchio di raggio } \sqrt{2}$$

$$= 2\pi \int_0^3 z dz = \pi [z^2]_{z=0}^{z=3} = 9\pi$$



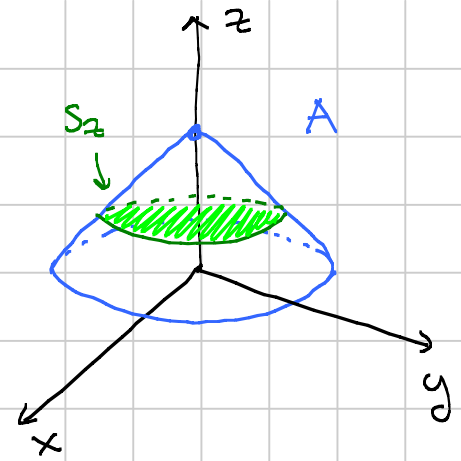
Esempio 2 $f(x,y,z) = \sin x + z^2$
 $A = \text{cono con base } x^2 + y^2 = 36 \text{ e vertice in } (0,0,1)$

Abbiamo almeno 2 opzioni

→ normale rispetto al piano (x, y)

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 36 \leftarrow \text{base } \Omega \\ 0 \leq z \leq 1 - \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

colonna sul p.to (x, y) in cui
uso eq. del cono per il "tappo alto"



$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^{1 - \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + y^2}} (\sin x + z) dz$$

↑
per colonne

= (fare ...)

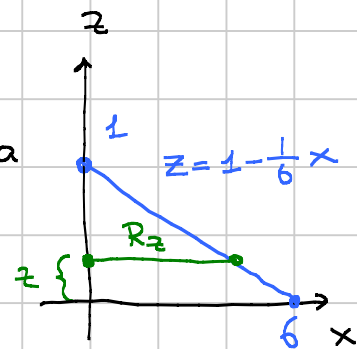
→ per sezioni

$$\iiint_A \dots = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy (\sin x + z)$$

Bisogna capire chi è S_z = cerchio di raggio R_z
che dipende dall'altezza

$$z = 1 - \frac{1}{6} R_z, \quad 6z = 6 - R_z, \quad R_z = 6(1 - z)$$

(controllo per $z=0, z=1$
viene sensato)



$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy \quad \textcircled{z} = \int_0^1 dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z) = \\ &= \int_0^1 z \cdot 6^2 (1 - z)^2 \pi dz = \text{Analisi 1} \end{aligned}$$

$$\iiint_A \sin x dx dy dz = 0 \quad \text{per simmetria !!!}$$

Utilizzo delle simmetrie per semplificare alcuni calcoli

Caso degli integrali di Analisi 1:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{se } f \text{ dispari}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{se } f \text{ è pari}$$

Slogan: f dispari in x , insieme simmetrico (cioè $[-a, a]$)
 $\Rightarrow \int_A f = 0$.

Caso degli integrali doppi

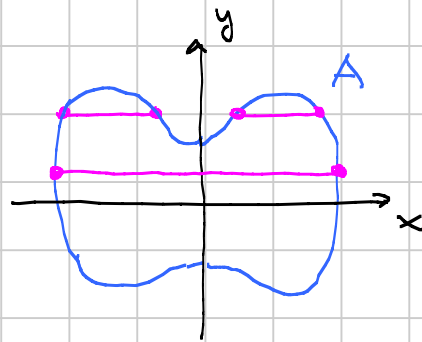
Slogan: $\rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ simmetrico rispetto all'asse y , cioè

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow (-x, y) \in A$$

$\rightarrow f(x, y)$ dispari in x , avè

$$f(-x, y) = -f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$$

Allora $\iint_A f(x, y) dx dy = 0$



[Dim. quando integro in dx sono nella stessa situazione di Analisi 1]

Se invece $f(-x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$ simmetrico come sopra
allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 2 \iint_{A^+} f(x, y) dx dy$$

$\uparrow$ metà destra di A
(o sinistra)

Gli stessi discorsi valgono, con la stessa dim., in 3 o più variabili

Tornando all'esempio $\iiint_A \sin x \, dx \, dy \, dz = 0$

perché: $\rightarrow \sin x$ è dispari in x

$\rightarrow$ Q' insieme A è simmetrico nel senso che

$$(x, y, z) \in A \Leftrightarrow (-x, y, z) \in A.$$

Analogamente, sullo stesso A , sarebbero nulli gli integrali di

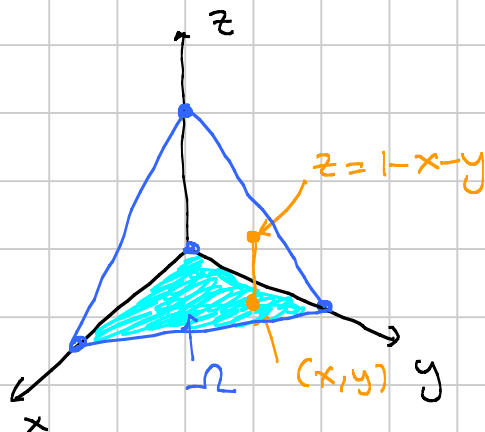
$$xy, \quad \underbrace{x^2 \arctan y}_{\text{dispari in } y}, \quad \underbrace{\sin(xz)}_{\text{dispari in } x} \quad \text{ma non } x^2 y^2$$

Esempio (Esercizio della tavola) $f(x, y, z) = x$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$$

$x+y+z=1 \leadsto$ piano per i 3 vettori della base canonico

A è un tetraedro particolare.

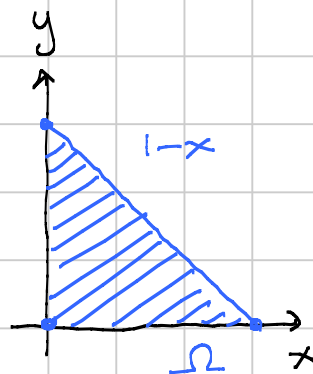


Per colonne l'integrale diventa

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \underbrace{\int_0^{1-x-y} dz}_{\text{colonna su } (x,y)} x$$

$$= \iint_{\Omega} x \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \, x = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$



Avevamo voluto procedere per sezioni

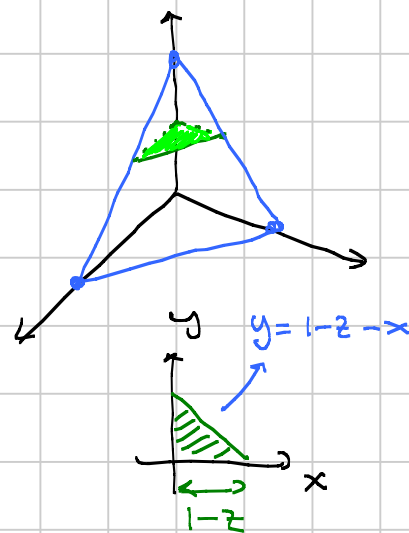
$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} x \, dx \, dy = (\star)$$

Ora S_z è un triangolo descritto da

$$S_z = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1-z \}$$

$$(\star) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy \, x$$

triangolo S_z come insieme normale risp. asse x



Esempio Rifacciamo l'esempio con

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \quad \text{e} \quad f(x, y, z) = z$$

Per sezioni diventa:

$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \, \textcircled{z} \\ &= \int_0^1 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = (\star) \end{aligned}$$

S_z = cerchio di raggio R_z , quindi

$$z = R_z^2, \quad \text{cioè} \quad R_z = \sqrt{z}$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z \, dz = \pi \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi.$$

— 0 — 0 —

