

INTEGRALI TRIPLI

- ① Notazione
- ② Significato geometrico / fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecniche di calcolo

① Notazione

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ ↑ ↑
 zona di integr. integrandi

Si intende : $\rightarrow A$ è limitato
 $\rightarrow f$ è limitata

② Significato fisico

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato pensato come un solido
 $f(x, y, z) \geq 0$ pensata come densità del
 materiale di cui è fatto il solido

Supponiamo di voler definire il peso totale del solido.

Idea: pensare di scomporre il solido in tanti "mattoncini" piccoli
 in ciascuno dei quali la densità è circa costante.

Posso approssimare il peso del solido con la somma dei pesi
 dei mattoncini che so calcolare facendo

$$\text{peso mattone} = \underbrace{\text{densità nel mattone}}_{\substack{\uparrow \\ \text{supposta costante}}} \cdot \underbrace{\text{volume}}_{\substack{\uparrow \\ \text{parallelepipedo}}}$$

Matematicamente ho costruito una somma di Riemann.

③ Definizione Andiamo a definire $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$

→ Caso banale $f = \text{costante}$ in un parallelepipedo
 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
e $= 0$ fuori

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i)$$

→ Caso semibanal $f = \text{comb. lineare di casi banali}$
L'integrale è def. come comb. lineare degli integrali

→ Caso generale : integrale inf. e sup. come sempre e poi se coincidono...

Valgono le solite propr. di sempre (linearità, monotonia, valore assoluto, prodotto) con le solite dimostrazioni.

Oss. Che nel processo di approx le step functions "sfiorano" rispetto al bordo dell'insieme in cui $f \neq 0$.

④ Tecniche di calcolo Formule di riduzione

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

Formula $3 = 1 + 1 + 1$

$$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \\ = \text{parallelepipedo}$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

Oss. Cambiando i nomi alle variabili otterremo 6 formule diverse
↑ 2° ordine

Esempio $A = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$ $\varphi(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{aligned} \iiint_A (x+yz) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz (x+yz) = (\text{primit. in } z) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=1}^{z=3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy [2x + 4y] \quad (\text{primitiva in } y) \\ &= \int_0^1 dx \left[2xy + 2y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 dx (4x + 8) \\ &= \left[2x^2 + 8x \right]_{x=0}^{x=1} = 10. \end{aligned}$$

Stesso esercizio, in modo forse più pratico

$$\begin{aligned} \iiint_A x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz \quad (\text{circled } x) = \int_0^1 x dx \underbrace{\int_0^2 dy \int_1^3 dz}_{\text{Area } [0,2] \times [1,3] \text{ quindi } 4} \\ &= \int_0^1 4x dx = [2x^2]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A yz dx dy dz &= \int_0^2 dy \int_1^3 dz \int_0^1 yz dx = \int_0^2 y dy \int_1^3 z dz \underbrace{\int_0^1 dx}_{1} \\ &= 8 \quad (+2 \text{ di prima} = 10) \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

$\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^2$ " 2 $\left[\frac{1}{2} z^2 \right]_1^3$ " 4 " 1

Formula $3 = 2 + 1$

INTEGRALE PER COLONNE

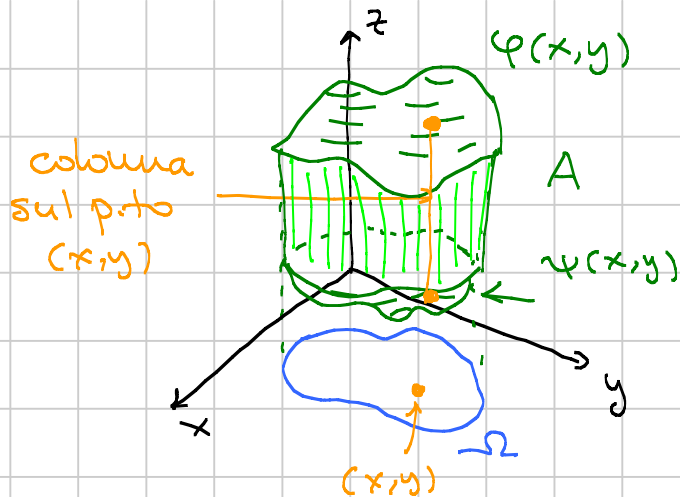
Definizione Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \underbrace{\Omega}_{\text{base}}, \underbrace{\psi(x,y)}_{\text{tappo sotto}} \leq z \leq \underbrace{\varphi(x,y)}_{\text{tappo sopra}} \}$$

La formula di integrazione diventa

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz$$

integrale in una variabile (z)
tra $\psi(x,y)$ e $\varphi(x,y)$



Esempio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

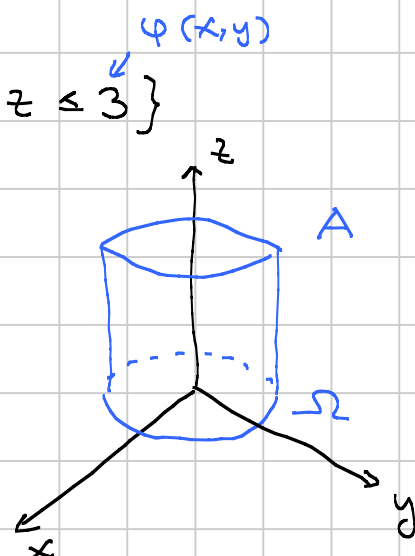
$$f(x,y,z) = z$$

A è normale rispetto al piano xy con
base $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\iiint_A z dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \underbrace{\int_0^3 dz}_{\text{colonna}} \cdot z$$

(primitiva in z) $= \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=3} = \frac{9}{2} \iint_{\Omega} dx dy$

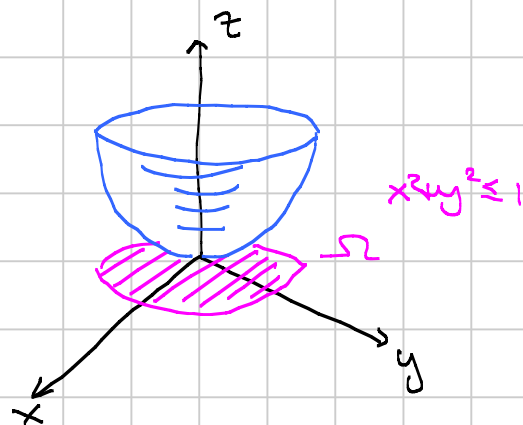
$$= \frac{9}{2} \text{Area}(\Omega) = \frac{9}{2} \cdot 2\pi = 9\pi$$



Esempio $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\psi(x,y)} \leq z \leq \underbrace{1}_{\varphi(x,y)}\}$

"sopra il paraboloide $z = x^2 + y^2$,
sotto il piano $z = 1$ "

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\Omega}, \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 1}_{\text{colonna}}\}$$



A questo punto

integrale sulla colonna

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^1 dz \, z \quad (\text{primitiva in } z)$$

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [1 - (x^2+y^2)^2] \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (x^2+y^2)^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \text{Area}(\Omega) - \frac{1}{2} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\sigma \, p^4 \cdot p \quad \uparrow J$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 p^5 dp$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{3} \pi$$