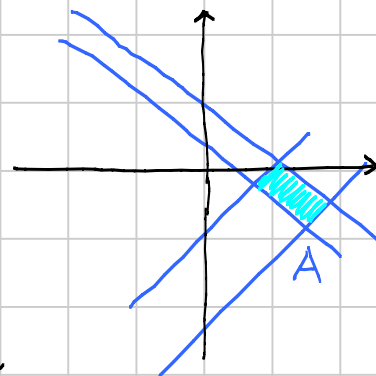


FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

$$(x^2 - y^2) = u \cdot v$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \overset{u}{x+y} \leq 3, 7 \leq \overset{v}{x-y} \leq 11\}$$



Si può fare come insieme normale, ma richiede vari spezzamenti

Mi piacerebbe tanto scrivere $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_2^3 du \int_7^{11} dv (uv)$

Domanda: come calcolare $J(u, v)$

↑
JACOBIANO

↑
 $J(u, v)$
pagamento

Formula: $\underbrace{\iint_A f(x, y) dx dy}_{\text{ciò che voglio calcolare}} = \iint_B \underbrace{g(u, v)}_{\substack{\text{A descritto nelle} \\ \text{variabili } u \text{ e } v}} \underbrace{J(u, v)}_{\substack{\text{f(x,y) nelle} \\ \text{nuove} \\ \text{variabili}}} du dv$

← pagamento

- Ricetta per ottenere J :
- ① ricavare x e y in funzione di u e v
 - ② scrivere la matrice jacobiana della trasformazione
 - ③ $J(u, v) = |\text{Det}|$

Nell'esempio: ① $u = x + y \quad v = x - y$

$$\leadsto x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\textcircled{3} \quad J(u,v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Quindi nell'esempio $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_2^3 du \int_{\frac{1}{u}}^{\frac{1}{u}} dv \cdot (uv) \cdot \frac{1}{2}$

$\uparrow$
 $J(u,v)$

= banalità

— 0 — 0 —

Verifica: cosa succederebbe nel caso delle coord. polari

① $x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

③ $|\text{Det}| = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$

— 0 — 0 —

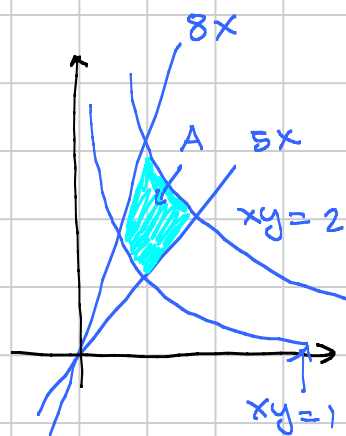
Esempio $\iint_A y dx dy$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \underbrace{xy}_u \leq 2, \quad 5x \leq y \leq 8x \}$$

$$5 \leq \frac{y}{x} \leq 8$$

$\downarrow$
 $\frac{y}{x}$

In coordinate si farebbe



Nelle nuove coordinate l'insieme è

$$1 \leq u \leq 2 \quad 5 \leq v \leq 8$$

① Ricavo x e y : $u = xy \quad v = \frac{y}{x}$

$$y = \sqrt{uv} \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$f(x,y)$ è diventata $\sqrt{uv}$

② Matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$

$$\textcircled{3} \quad J(u,v) = |\text{Det}| = \left| \frac{1}{4} \frac{1}{v} + \frac{1}{4} \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{2v}$$

In conclusione

$$\iint_A y \, dx \, dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_5^8 dv}_{\text{insieme A nelle coord. } u \text{ e } v} \underbrace{\sqrt{uv}}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{2v}}_{J(u,v)} = \text{facile.}$$

Procedura alla rovescia per calcolare $J(u,v)$

① Scrivo u e v in funzione di x e y : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$

② Faccio la matrice in questa direzione

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Calcolo } |\text{Det}| = \frac{2y}{x} = 2v$$

④ Faccio J inverso $J(u,v) = \frac{1}{2v}$ come prima.

Oss. È come se partissi dall'integrale in (u,v) e volessi trasportarlo in (x,y) .

— o — o —

Casi speciali utili

① Traslazioni: $u = x+a$, $v = y+b \rightsquigarrow J(u,v) = 1$

② Dilatazioni lungo gli assi: $u = ax$, $v = by \rightsquigarrow J(u,v) = (ab)^{-1}$

③ Affinità: $(x,y) = A(u,v) + (a,b) \rightsquigarrow J(u,v) = |\text{Det } A|^{-1}$

Esempio 1 $\iint_A y^2 dx dy$

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 5 \}$

Risolvere insieme

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_u + \underbrace{(\sqrt{3}y)^2}_v \leq 5 \quad u^2 + v^2 \leq 5$$

① $x = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{v}{\sqrt{3}}$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Conclusione $\iint_A y^2 dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 5 \\ \text{nuovo} \\ \text{insieme}}} \underbrace{\frac{v^2}{3}}_{y^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{J(u,v)} du dv$

$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \iint_{u^2+v^2 \leq 5} v^2 du dv = \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \sin^2 \theta \rho$

↑
coord.
polari

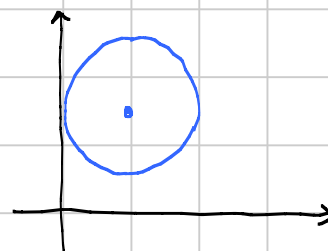
$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \underbrace{\int_0^{\sqrt{5}} \rho^3 d\rho}_{\frac{25}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \cdot \frac{25}{4} \cdot \pi$

Esempio 2 $\iint_A x dx dy$

$A =$ cerchio con centro in $(2,3)$ e raggio 2

Deve venire positivo

$$\underbrace{(x-2)^2}_u + \underbrace{(y-3)^2}_v \leq 4$$



Traslazione $\Rightarrow J(u,v) = 1$

Quindi

$$\iint_A x \, dx \, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) \cdot 1 \, du \, dv$$

$$= \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} u \, du \, dv}_0 + 2 \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} 1 \, du \, dv}_{\text{Area cerchio} = 4\pi} = 8\pi$$

"
 0
 per simmetria

Oss. 1 In generale $\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A)$

Oss. 2 Il discorso delle simmetrie si dimostra con un cambio di variabili usando la simmetria stessa.

Giustificazione ULTRA-BRUTALE della procedura

→ se vale per i rettangoli, vale per tutte le funzioni

→ se la trasformazione è una affinità, allora
rettangolo $\rightsquigarrow$ parallelogrammo, la cui area è
un determinante

→ se il rettangolo è abbastanza piccolo, posso appross.
la trasformazione al 1° ordine con Taylor, quindi
con una affinità.

— o — o —