

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

FORMULA

$$\underbrace{\iint_A f(x,y) dx dy}_{\substack{\uparrow \\ \text{integrale che voglio} \\ \text{calcolare}}} = \iint_B f(\overset{x}{\rho \cos \theta}, \overset{y}{\rho \sin \theta}) \underbrace{\rho}_{\substack{\uparrow \\ \text{pagamento}}} d\rho d\theta$$

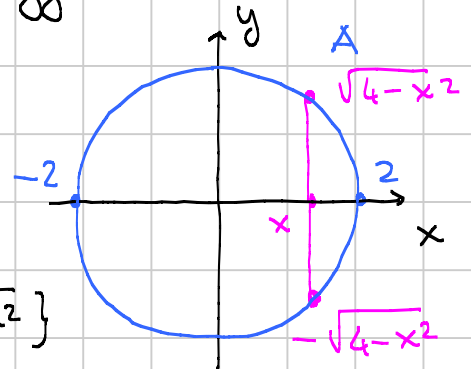
Insieme A descritto in coordinate polari

Esempio 1 $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$

A = cerchio con centro in (0,0) e raggio 2

1° modo Vedere A come insieme normale rispetto asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$



A questo p.to

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-2}^2 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

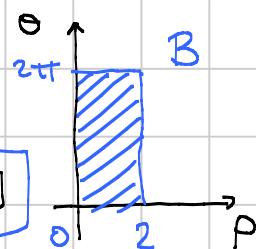
= resta integrale pieno di radici

Stessa sorte se lo vedemo come insieme normale rispetto asse y.

2° modo Uso coordinate polari

Descrivo A in coord. polari

$$\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$



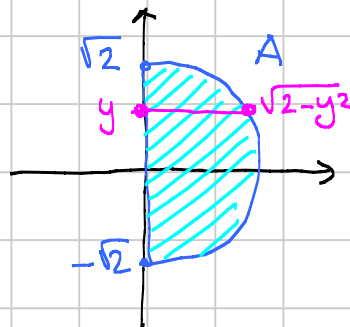
$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) dx dy &= \underbrace{\int_0^2 d\rho}_{\text{B: descrizione di A in coord. polari}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{\text{pagamento}} \underbrace{\rho^2}_{f(x,y) \text{ in coord. polari}} \\ &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\rho^3}_{\text{B}} = \int_0^2 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

Operativamente: integrare in coord. pol. è comodo quando si ha simmetria radiale.

Esempio 2 $\iint_A y^2 dx dy$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$

Come insieme normale

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}, 0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\} \end{aligned}$$



In coord. polari: $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ opp. $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$

Non pensare nemmeno $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \iint_A y^2 dx dy &= \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} d\rho}_{\text{A in coord. pol.}} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{pag.}} \underbrace{\rho^2 \sin^2 \theta}_{y^2} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Oss. (risolvere analisi 1)

$$k \in \mathbb{Z}, R \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{R\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{R\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = (R-k) \frac{\pi}{4}$$

In altre parole: l'integrale di $\sin^2 \theta$ o di $\cos^2 \theta$ tra estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale a metà della lunghezza dell'intervallo.

Dim. $C = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta$ $S = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta$

Allora $C = S$ (per simmetria) e $C + S = \int_0^{\pi/2} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{2}$

Per riflessione in tutti gli altri intervalli

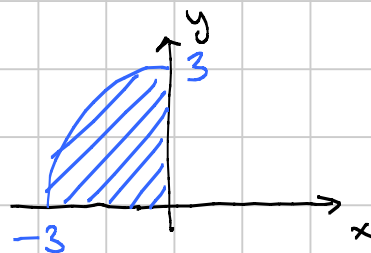
Altra cosa da ricordare: $\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = \pm 1$ e idem. per $\cos \theta$

Esempio 3 $\iint_A x \, dx \, dy$

A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 3 intersecato il 2° quadrante.

$$= \underbrace{\int_0^3 dp}_{A \text{ in coord. polari}} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta}_{x} \underbrace{p \cos \theta}_{\text{pag}}$$

$$= \underbrace{\int_0^3 p^2 dp}_9 \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta}_{-1} = -9$$



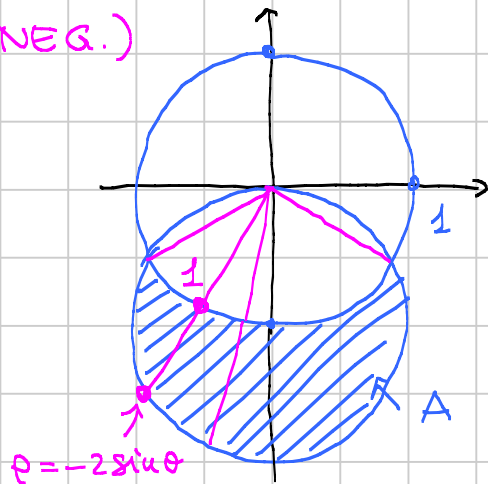
Oss. Il segno poteva prevederlo dall'inizio perché l'integrand è ≤ 0 nell'insieme di integrazione

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\iint_A y \, dx \, dy$ (DEVE VENIRE NEG.)

A = lunetta come in figura

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (y+1)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 + 2y = 0$$



In coord. cartesiane sembra complicato.

Proviamo in coord. polari

$$x^2 + y^2 \geq 1 \quad \leadsto \quad \rho \geq 1 \quad (\text{fuori dal primo cerchio})$$

$$x^2 + y^2 + 2y \leq 0 \quad \leadsto \quad \rho^2 + 2\rho \sin \theta \leq 0 \quad (\text{dentro il 2° cerchio})$$

$$\rho + 2 \sin \theta \leq 0 \quad \leadsto \quad \rho \leq -2 \sin \theta$$

Riassumendo: $1 \leq \rho \leq -2 \sin \theta$

Se impongo $1 \leq -2 \sin \theta$ ottengo dove varia θ : $\sin \theta \leq -\frac{1}{2}$
da cui $\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$.

L'insieme A in coord. polari è

$$\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}, \quad 1 \leq \rho \leq -2 \sin \theta$$

Normale rispetto all'asse θ

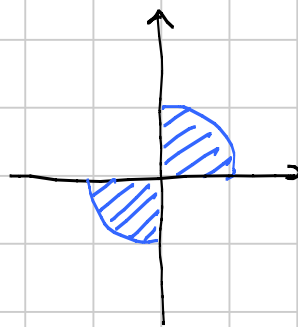
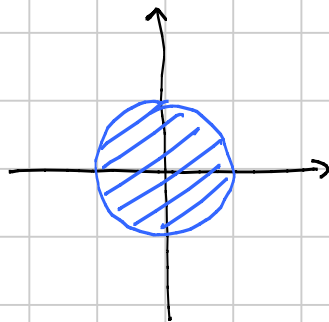
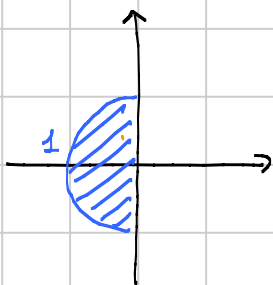
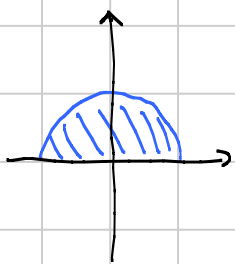
$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} d\theta \int_1^{-2 \sin \theta} \rho \sin \theta \, \boxed{\rho} \, d\rho$$

↑
pag.

$$= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sin \theta \, d\theta \int_1^{-2 \sin \theta} \rho^2 \, d\rho = \text{conti analisi 1.}$$

— 0 — 0 —

Oss. Spesso le simmetrie posso semplificare dei calcoli mostrando che certi integrali sono nulli.



x
 y
 xy
 $x^2 \text{ or } \cos^2 y$
 $\sin x \cos y$

0
 > 0
 0
 0
 0

< 0
 0
 0
 0
 < 0

0
 0
 0
 0
 0

0
 0
 > 0
 > 0
 0

↑
INTEGRANDE

↑ SEGNO PREVISTO DELL'INTEGRALE