

Formula di spezzamento (caso speciale)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come sempre.

Supponiamo che

(i) f è integrabile su $\mathbb{R}^2$

(ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ la restrizione alla colonna $y \rightarrow f(x, y)$ è integrabile in $\mathbb{R}$. (ii) non segue da (i))

Allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy f(x, y)}_{\text{ho assunto che esiste}}$$

il fatto che esiste fa parte della tesi

Dim. Scrivo la tesi del teorema generale con tutti = (perché per ipotesi (i) sono uguali RHS e LHS):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy}_{\text{senza * per hp (ii)}} \\ &= \int_{\mathbb{R}}^* dx \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Questo basta per concludere che la funzione

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

è integrabile su $\mathbb{R}$ e vale l'uguaglianza.

Oss. Vale un enunciato simmetrico per concludere che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx f(x, y)$$

Oss. Non basta che gli integrali separati esistano senza problemi e coincidano per dedurre l'integrabilità in $\mathbb{R}^2$
(vedi esempio di fine les. precedente)
— o — o —

INSIEMI MISURABILI

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}^2$, cioè

$$\iint_A 1 \, dx \, dy \text{ esiste.}$$

In tal caso l'integrale si chiama misura di A

Criterio di misurabilità Un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due insiemi

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

tali che

(i) B_ε e C_ε sono unioni di rettangoli con lati // agli assi

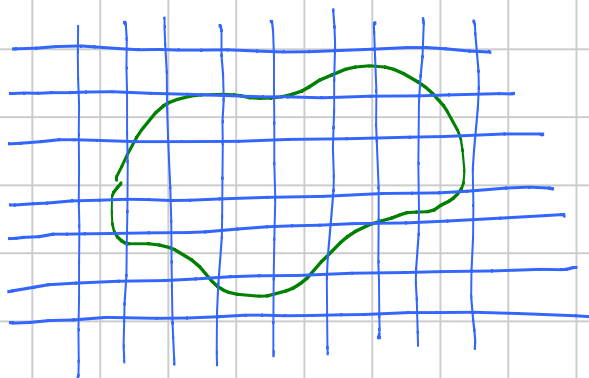
(ii) $\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$

essendo unioni di rettangoli,
l'area è quella classica

[Unioni FINITE:
precisione (spero ovvia)
aggiunta dopo video]

→ In C_ε prendo tutti i rettangoli R
t.c. $R \cap A \neq \emptyset$

→ In B_ε prendo gli R t.c.
 $R \subseteq A$



Dim (idea) Se la funzione caratt. di A è integrabile, allora esistono S.F. φ_ε e ψ_ε con

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \leq \underbrace{1_A(x,y)}_{\text{caratteristica}} \leq \psi_\varepsilon(x,y)$$

con

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

Pongo $B_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\varepsilon(x,y) > 0\}$

$C_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_\varepsilon(x,y) > 0\}$

Si verifica che

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

e inoltre

$$\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

↑
varrebbe = se facessi φ_ε e ψ_ε alla
Darboux

— o — o —

Conseguenza Gli insiemi normali con "tappi" continui sono misurabili

Dim. Prendiamo il caso rispetto all'asse x . Allora

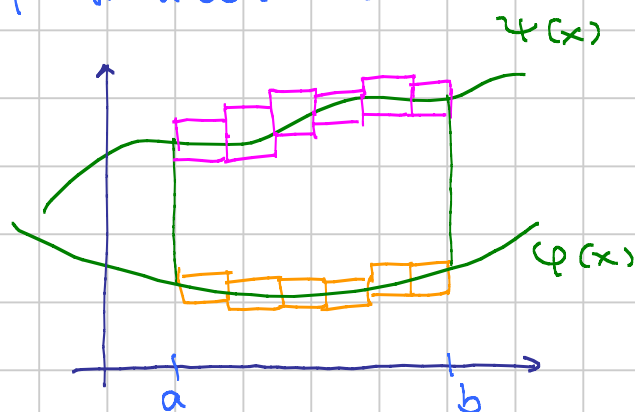
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

↑
funzioni continue

Basta che φ e ψ siano integrabili nel senso dell'analisi 1 per avere

B_ε e C_ε come richiesto.

La conclusione è ovvia.



Teorema (più sensato di quello della lezione 29)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua

Allora f è integrabile su $\mathbb{R}^2$

Dim. Pongo $\hat{f}(x,y) = f(x,y) \cdot 1_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{in } A \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$

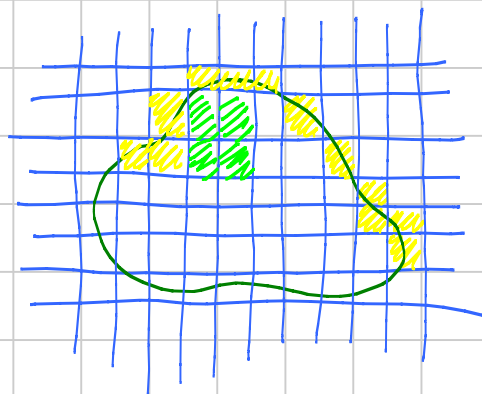
Dato $\varepsilon > 0$, devo costruire φ_ε e ψ_ε come nel criterio di integrabilità

Nei rettangolini gialli, pongo

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = -M$$

$$|f(x,y)| \leq M$$

$$\psi_\varepsilon(x,y) = M$$



"Pago"

$$\iint_{\text{gialli}} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leq 2M \cdot \underbrace{\text{Area gialli}}$$

↑
Essendo A misurabile,
può diventare piccola a
piacere.

Pongo $B :=$ unione rettangoli dentro. Allora B è compatto, quindi essendo f continua vale Heine-Cantor (come ad analisi 1) e quindi per di suddividere abbastanza fitto so che

$$\max \{ f(x,y) : (x,y) \in R \} - \min \{ f(x,y) : (x,y) \in R \} \leq \varepsilon$$

per ogni rettangolino R .

Definisco ora

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = \min_{R \text{ che fa parte di } B} f(x,y)$$

$$\psi_\varepsilon(x,y) = \max_{R \text{ che fa parte di } B} f(x,y)$$

Pago

$$\iint_B (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon \cdot \text{area}(B)$$

↑
diventa piccolo a piacere
(più voglio ε piccolo, più devo
prendere i rettangoli R fitti)

Hint per costruire f non integrabile con sezioni molto buone

Lemma Esiste $D \subseteq [0,1] \times [0,1]$ denso tale che

(i) ogni retta $x = x_0$ contiene al max 1 pto di D

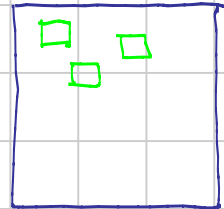
(ii) " " $y = y_0$ " " " " " "

Dato il lemma, l'esempio cercato è 1_D (non è integrabile e sulle sezioni viene 0).

Idea per il lemma D è denso se e solo se interseca ogni sottoquadratino con estremi razionali

I sottoquadratini con estremi in $\mathbb{Q}$ sono numerabili, cioè li posso mettere in successione

$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_k, \dots$



Per induzione posso prendere punti $P_k \in Q_k$ facendo in modo che P_k non stia sulle $(k-1)$ rette orizz. e $(k-1)$ rette verticali già usate prima.

Con la stessa idea forse si può fare l'esempio più difficile.

— o — o —