

Teorema (molto misterioso)

Funzioni decenti (ad esempio continue)

su insiemi decenti (ad esempio poligoni / cerchi / ...)

sono integrabili secondo Riemann.

Inoltre l'integrale si può calcolare con la formula di riduzione

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \end{aligned}$$

FORMULA DI RIDUZIONE
 $2 = 1 + 1$

Oss. Queste formule sono l'analogo di quello che in matematica discreta si chiama DOUBLE COUNTING

k_{ij}	k_{00}	k_{01}	k_{02}		$\rightarrow R_0$
		k_{11}			$\rightarrow R_1$
				k_{23}	$\rightarrow R_2$
	k_{30}			k_{34}	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	C_0	C_1	C_2	C_3	

$$\sum_{i,j} k_{ij} = \sum_j C_j = \sum_i R_i$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right] dy$$

x è fisso e integro solo rispetto alla variabile y =
integrale su colonna x

y è fisso =
integrale sulla riga ad altezza y

Primo caso L'insieme di integrazione è un rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Esempio 1 $R = [0, 2] \times [0, 1]$ $f(x, y) = y^2 + xy$

$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + xy) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^1 dy (y^2 + xy) \\ &= \int_0^2 dx \left[\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{primitiva rispetto ad } y \\ \text{(sostituisco estremi)} \end{array} \right. \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} x \right) dx \quad \text{(Analisi 1)} \\ &= \left[\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Posso usare formula di riduzione nell'altro senso

$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + xy) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^2 dx (y^2 + xy) \quad \text{(Primitiva in } x) \\ &= \int_0^1 dy \left[xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=2} \quad \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^1 dy [2y^2 + 2y] \quad \text{(Analisi 1)} \\ &= \left[\frac{2}{3} y^3 + y^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Oss. Fare l'integrale in 2 modi è un'ottima verifica della correttezza del risultato.

INSIEMI NORMALI

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

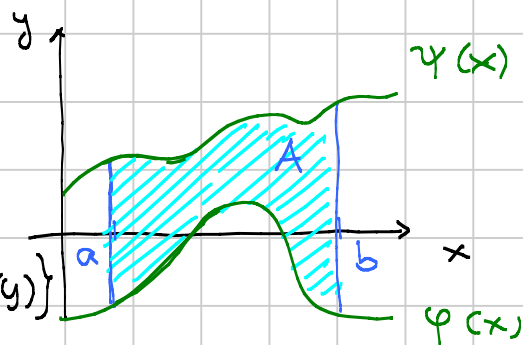
- normale rispetto all'asse x se si può scrivere nella forma

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

per opportuni $a < b$ e funzioni $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

- normale rispetto all'asse y se si può scrivere come

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$



(come prima, ma girato di 90°).

Oss. Se φ e ψ sono continue, l'insieme A rientra tra quelli decanti del teorema misterioso.

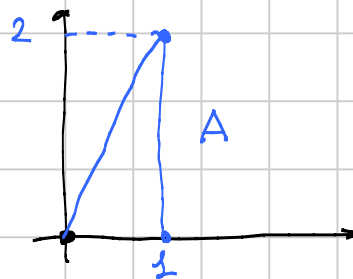
Formula di riduzione su insiemi normali

Asse x :
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x,y)$$

Asse y :
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx f(x,y)$$

Esempio $A =$ triangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$

$$f(x,y) = y$$



Scrivo A come normale asse x:

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \cdot y && \text{(primitiva rispetto a y)} \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} && \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^1 2x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

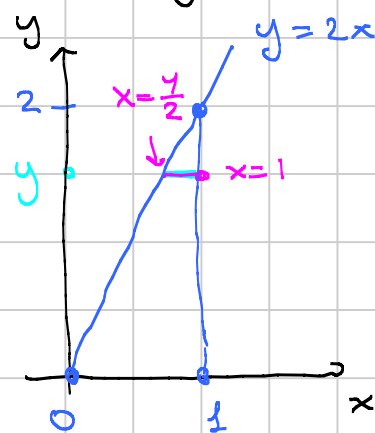
Per verifica, scrivo A come normale rispetto all'asse y

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y \leq x \leq 1 \}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \, y &= \text{(primitiva in x)} \\ &= \int_0^2 dy [xy]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} && \text{(sostituisco gli estremi)} \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 dy \left[y - \frac{1}{2}y^2 \right] = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$



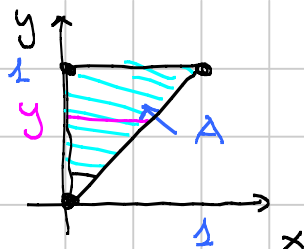
Osservazione Il secondo svolgimento si poteva semplificare

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \, \underbrace{y}_{\text{non dipende da } x, \text{ quindi pu\`o uscire fuori}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 y \, dy \underbrace{\int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \cdot 1}_{\text{l'integrale di 1 su un insieme \`e la lunghezza } 1 - \frac{1}{2}y} \\ &= \int_0^2 y \left(1 - \frac{1}{2}y\right) dy = \text{come prima.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_A e^{-y^2} dx dy$

Normale asse x



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_A e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{-y^2} \quad (\text{Non so fare la primitiva } \text{☹️})$$

Normale asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{-y^2} = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y dx \\ &= \int_0^1 y e^{-y^2} dy \quad \text{☺️} \end{aligned}$$

Per veri duri...

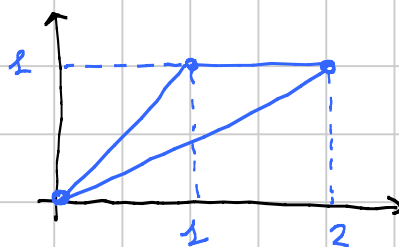
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{-y^2} &= \int_0^1 dx [F(y)]_x^1 = \int_0^1 dx [F(1) - F(x)] \\ &\quad \text{una primitiva} \quad \uparrow \quad \text{se calcolo bene la primitiva fa 0} \quad \text{☺️} \end{aligned}$$

L'altro termine lo integro per parti e mi viene $x e^{-x^2}$

— o — o —

Normale asse x

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \dots + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy \dots$$



Normale asse y

$$\int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \dots$$