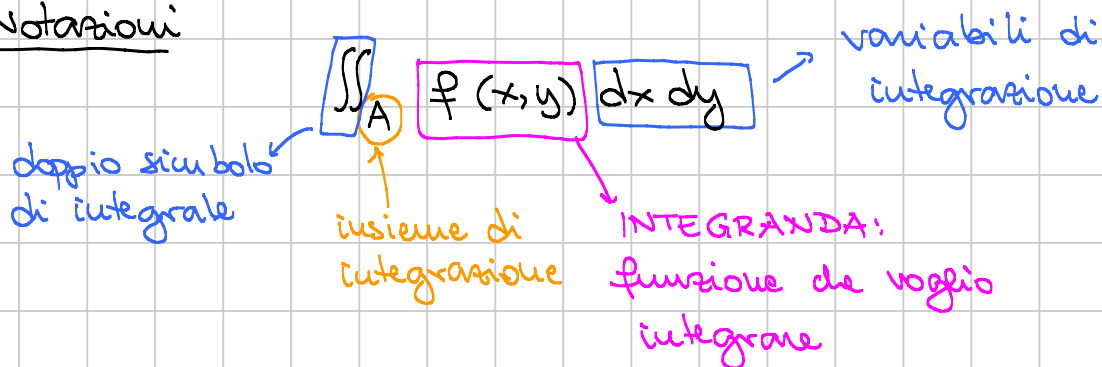


INTEGRALI DOPPI

- ① Come si indicano (notazioni)
- ② Significato geometrico
- ③ Definizione
- ④ Tecniche di calcolo

1 Notazioni

Spesso si abbrevia scrivendo $\int_A f(x,y) dx dy$

Si parla di integrale **PROPRIO** se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sono verificate due richieste

- (i) A limitato (cioè $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B_R(0,0)$)
- (ii) f limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

Si parla di integrale **IMPROPRIO** se manca almeno una delle richieste fondamentali.

Il "risultato" dell'integrale, posto che esista, è un **NUMERO REALE**.

— o — o —

② Significato geometrico Supponiamo $f(x,y) \geq 0$ in A .

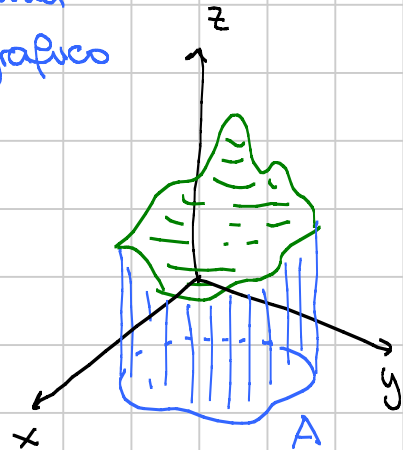
$\iint_A f(x,y) dx dy$ = volume della regione di spazio compresa tra piano base xy e grafico di f .
Formalmente la regione è

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in A}_{\substack{\uparrow \\ \text{la regione si} \\ \text{proietta su } A}}, \underbrace{0 \leq z \leq f(x,y)}_{\substack{\text{la quota varia} \\ \text{da 0 al grafico} \\ \text{di } f(x,y)}}\}$$

Se $f(x,y) \leq 0$ in A , allora integrale = volume cambiato di segno

Se $f(x,y)$ ha segno variabile, allora

integrale = somma algebrica dei volumi delle varie zone in cui $f(x,y)$ ha segno costante
— 0 — 0 —



③ Definizione Conviene definire $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$ prendendo come ipotesi che

(ii) f è limitata in $\mathbb{R}^2$

(i) $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato tale che $f(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \notin A$
(poi può fare 0 anche in p.ti di A)

A questo punto quando vorremo calcolare / definire l'integrale su un certo $B \subseteq \mathbb{R}^2$ potremo

$$\iint_B f(x,y) dx dy := \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y) dx dy \quad \text{dove}$$

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in B \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin B \end{cases}$$

La definizione procede in 3 tappe:

- caso banale
- caso semibanale
- caso generale

Caso banale : f costante su un rettangolo con lati // agli assi, cioè esistono $[a, b]$ e $[c, d]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x, y) = \lambda \quad \text{per } (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

$= 0$ al di fuori

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy := \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\uparrow \text{area rettangolo} \\ \text{base}}}$$

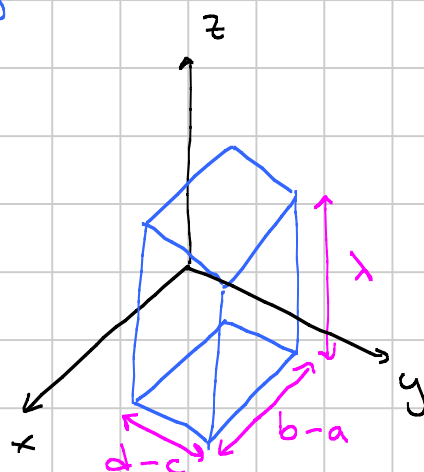
altezza con segno del parallelepipedo

Caso semibanale : f è combinazione lineare di casi banali, cioè

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{R_i}(x, y)$$

dove $R_i := [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ e

$$\varphi_{R_i}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin R_i \end{cases}$$



funzione caratteristica del rettangolo R_i

Def. Indichiamo con $SF(\mathbb{R}^2)$ l'insieme delle funzioni di questo tipo, che si chiamano

- step functions
- funzioni semplici
- funzioni a gradino

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{(b_i - a_i)(d_i - c_i)}_{\text{Area } R_i}$$

↑
altezza parallelepipedo i -esimo

Oss. Il "grafico" di una $f \in SF(\mathbb{R}^2)$ è una serie di mattoni con lati paralleli agli assi di $\mathbb{R}^3$.

Lemma (fondamentale che avrebbe dimostrato) Se due combinazioni lineari diverse definiscono la stessa funzione, allora l'integrale definito come sopra è lo stesso.

— o — o —

Caso generale Sia ora $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le ipotesi (i) e (ii). Allora si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy := \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \leq \varphi(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

↑
integrale superiore

$$\iint_{*} \mathbb{R}^2 f(x,y) dx dy := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \geq \varphi(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

↑
integrale inferiore

Lemma (Quasi ovvio) Per ogni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica (i) e (ii) vale la disuguaglianza

$$\iint_{*} \mathbb{R}^2 f(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy$$

Per dimostrarlo per bene servirebbe sapere che se φ e ψ sono in $SF(\mathbb{R}^2)$ e

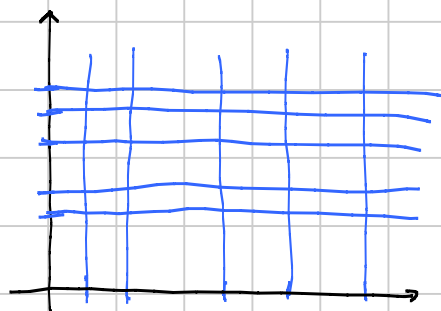
$$\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) dx dy$$

(a sua volta serve un lemma che dice che 2 step functions possono essere pensate definite a partire dagli stessi rettangoli)



Def. Quando succede che nel lemma quasi ovvio c'è uguaglianza, allora si dice che f è integrabile secondo RIEMANN in $\mathbb{R}^2$ e il valore comune è l'integrale.

Proposizione (Quasi ovvio) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa (i) e (ii). Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } \psi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ tali che}$

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi_\varepsilon(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [\psi_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)] dx dy \leq \varepsilon$$

somme
inferiori

somme
sup
↑
integrale

Oss

(1) Abbiamo usato (i) e (ii) per essere sicuri che esistono elementi di $SF(\mathbb{R}^2)$ sopra e sotto $f(x,y)$.

(2) Si ottiene la stessa definizione (esercizio) lavorando alla DARBOUX, cioè usando solo funzioni $SF(\mathbb{R}^2)$ ottenute prendendo in ogni rettangolo $\sup$ e $\inf$ di $f(x,y)$.

— o — o —