

Esercizio 1 Consideriamo $f(x, y) = x^a y^b$ definita in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

Determinare per quali valori di a e b reali risulta convessa.

(Fosse in $\mathbb{R}$: $f(x) = x^a$ è convessa per $x > 0 \Leftrightarrow a(a-1) \geq 0$)

Dim. Essendo C^∞ basta fare Hf

$$f_x = a x^{a-1} y^b$$

$$f_y = b x^a y^{b-1}$$

$$f_{xx} = a(a-1) x^{a-2} y^b$$

$$f_{yy} = b(b-1) x^a y^{b-2}$$

$$f_{xy} = ab x^{a-1} y^{b-1}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} a(a-1) x^{a-2} y^b & ab x^{a-1} y^{b-1} \\ ab x^{a-1} y^{b-1} & b(b-1) x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Hf è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$

$$a(a-1) \geq 0$$

$$b(b-1) \geq 0$$

$$\text{Det} \geq 0 \quad a(a-1)b(b-1) - a^2 b^2 \geq 0$$

Esercizio 2 Consideriamo una funzione radiale

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

con g di classe C^2 .

Capire quali condizioni su g assicurano la convessità di $f(x, y)$

Dim. Calcolo le derivate:

$$f_x = g'(x^2+y^2) \cdot 2x$$

$$f_y = g'(x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$f_{xx} = g''(x^2+y^2) 4x^2 + 2g'(x^2+y^2)$$

$$f_{yy} = g''(x^2+y^2) 4y^2 + 2g'(x^2+y^2)$$

$$f_{xy} = g''(x^2+y^2) 4xy$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2 g''(\dots) + 2g'(\dots) & 4xy g''(\dots) \\ 4xy g''(\dots) & 4y^2 g''(\dots) + 2g'(\dots) \end{pmatrix}$$

Le condizioni sono: $\rightarrow$ due termini sulla diagonale ≥ 0
 $\rightarrow \text{Det} \geq 0$

$$\text{Det} = (4x^2 g'' + 2g')(4y^2 g'' + 2g') - 16x^2 y^2 (g'')^2$$

$$= 16x^2 y^2 (g'')^2 + 8(x^2+y^2) g'' g' + 4(g')^2 - 16x^2 y^2 (g'')^2$$

$$= 4g'(x^2+y^2) [2(x^2+y^2) g''(x^2+y^2) + g'(x^2+y^2)]$$

La condizione, in termini della $g(x)$, è che

$$g'(x) [2x g''(x) + g'(x)] \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

Esempio 3 Stabilire dove è convessa la funzione

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$$

Siamo nel caso precedente con $g(x) = \log(1+x^2)$. Facciamo i conti:

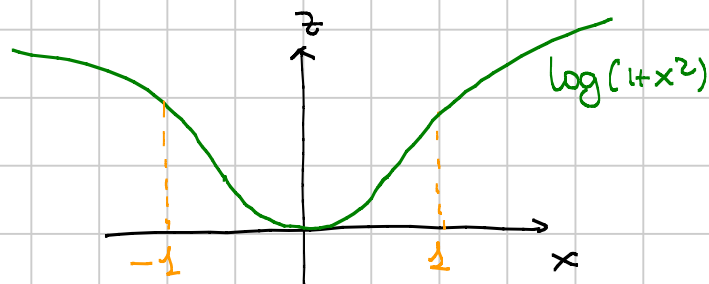
$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0 \text{ per } x > 0; \quad g''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$2x g''(x) + g'(x) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(2-2x^2+1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Semberebbe venire

$$\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^2} \geq 0 \dots \text{controllare.}$$

Come è fatta la funzione?



$\log(1+x^2+y^2)$ = rotazione intorno

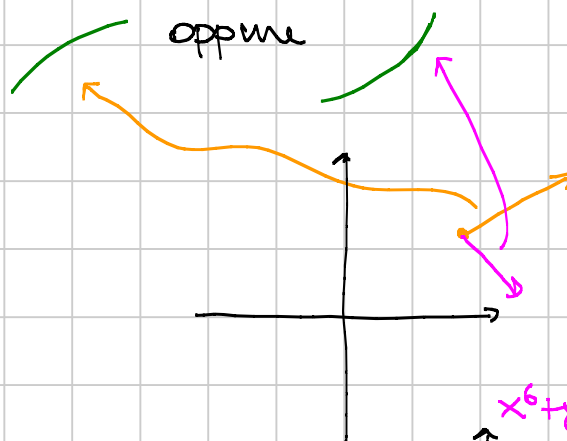
all'asse z del grafico precedente pensato nel piano xz

Idea geometrica:

→ vicino all'origine f è convessa

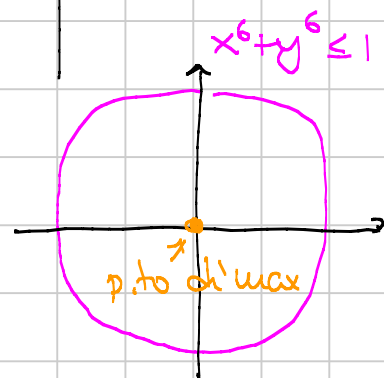
→ lontano dall'origine $\text{Det } Hf < 0$, quindi Hf ha autovalori $\pm$ quindi $f(x,y)$ non è né concava, né convessa.

Detto: curve diversi che passano per un p.to lontano dall'origine possono vedere



Esempio 4 $\max_{\min} \{ \cos x + \cos y : x^6 + y^6 \leq 1 \}$

Se fosse su tutto $\mathbb{R}^2$: $\max = 2$, $\min = -2$



Insieme compatto: $\max$ e $\min$ esistono 😊

→ Singolari interni: $\emptyset$

→ Staz. interni $\begin{cases} -\sin x = 0 & x = k\pi \\ -\sin y = 0 & y = l\pi \end{cases}$ interni solo $(0,0)$

Il minimo sarà sul bordo, che tratto con i moltiplicatori

1° sistema : verificare che non ha soluzioni

2° sistema :
$$\begin{cases} \phi_x = \lambda \phi_x \\ \phi_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sin x = 6\lambda x^5 \\ -\sin y = 6\lambda y^5 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

→ Se $x=0$, allora $y = \pm 1 \rightsquigarrow (0, \pm 1)$

→ Se $y=0$, allora $x = \pm 1 \rightsquigarrow (\pm 1, 0)$

→ Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ divido e trovo

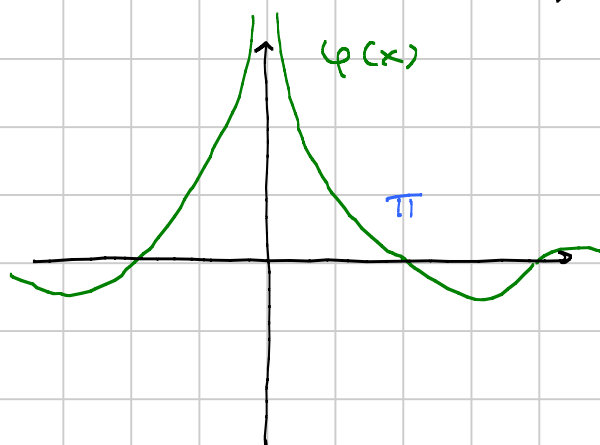
$$-\frac{\sin x}{x^5} = 6\lambda = -\frac{\sin y}{y^5}$$

Spero proprio tanto che $\frac{\sin x}{x^5}$ sia iniettiva in $[-1, 1]$
così deduco che $x=y$.

Ora è PARI 😞, ma fortunatamente è iniettiva in $[0, 1]$,
quindi posso dedurre che $x = \pm y$.

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x^5}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x \cdot x^5 - 5x^4 \cdot \sin x}{x^{10}}$$



Spero $\varphi'(x) \leq 0$ per $x \in [0, 1]$, cioè

$$x^4 \underbrace{(x \cos x - 5 \sin x)}_{\text{questa si studia}}$$

$$g(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - x \sin x - 5 \cos x \\ &= -x \sin x - 4 \cos x < 0 \text{ in } (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

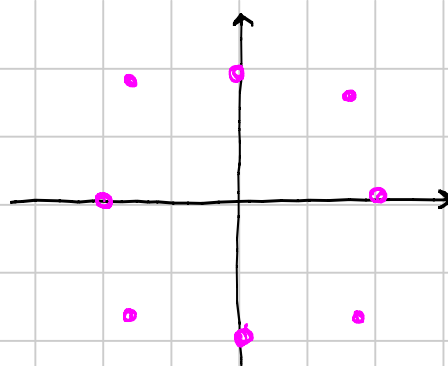
Inoltre $g(0) = 0$, quindi

$$g(x) < 0 \text{ per } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Una volta stabilito che $y = \pm x$
vengono fuori 4 altre soluzioni del sistema.

Quindi alla fine i candidati sono 8

Non resta che sostituire



Domanda: cosa succede se considero

$$x^6 + y^6 = R$$

Per R piccoli il minimo sarà con $x = \pm y$, ad un certo valore R_0 il minimo non sarà più nei pti con $x = \pm y$

— 0 — 0 —