

Convessità vs Continuità in più variabili

$f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa
 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

ROAD MAP

- ① f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$
- ② f è continua in $\text{Int}(C)$
- ③ f è loc. limitata dall'alto e dal basso in $\text{Int}(C)$
- ④ f è loc. Lipschitziana in $\text{Int}(C)$

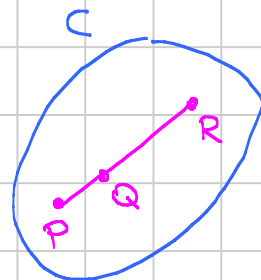
① Segue dal fatto che f essendo convessa è limitata dall'alto sui cubi che hanno # finito di p.ti estremali (2^n in $\mathbb{R}^n$)

③ Segue dal p.to ② e dal te. di Weierstrass.

Lemma (dei 3 rapporti incrementali) Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Siano P, Q, R tre p.ti di C , con Q che sta sul segmento PR .

Allora



$$\frac{f(Q) - f(P)}{|Q - P|} \leq \frac{f(R) - f(P)}{|R - P|} \leq \frac{f(R) - f(Q)}{|R - Q|}$$

Dim. Considero $\varphi(t) := f(P + t(R - P))$ $t \in [0, 1]$

È una funzione convessa.

$$\varphi(0) = f(P)$$

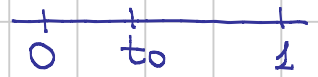
$$\varphi(1) = f(R)$$

$$\varphi(t_0) = f(Q) \text{ con } t_0 = \frac{|Q - P|}{|R - P|} \quad (\text{N.B. } 1 - t_0 = \frac{|R - Q|}{|R - P|})$$

Scrivo il lemma dei 3 rapporti per la $\varphi(t)$:

$$\frac{\varphi(t_0) - \varphi(0)}{t_0} \leq \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1} \leq \frac{\varphi(1) - \varphi(t_0)}{1 - t_0}$$

" " "



$$\frac{f(a) - f(p)}{|a - p|} |R - p| \leq \frac{f(R) - f(p)}{1} \leq \frac{f(R) - f(a)}{|R - a|} |R - p|$$

Divido e ho la tesi. $\square$

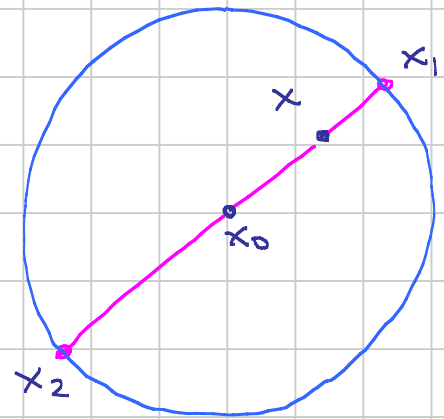
— o — o —

② f è continua in $\text{Int}(C)$

Dim. Prendo $x_0 \in \text{Int}(C)$ e scelgo $r_0 > 0$ t.c.

$$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$$

Per il punto ① sappiamo che $f(x)$ è limitata dall'alto in $\overline{B}_{r_0}(x_0)$, diciamo $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.



$$f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{B}_{r_0}(x_0)$$

Prendo un qualunque $x \neq x_0$ nella palla.

Applico il lemma dei 3 rapporti con $P = x_0$, $Q = x$, $R = x_1$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{|x_1 - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

Applico ora il lemma con $P = x_2$, $Q = x_0$ ed $R = x$:

$$\frac{f(x_0) - M}{r_0} \leq \frac{f(x_0) - f(x_2)}{|x_0 - x_2|} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|}$$

Abbiamo dim. che

$$-\frac{M - f(x_0)}{r_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

cioè

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

Porto $|x - x_0|$ al RHS e passo al limite per $x \rightarrow x_0$ e ho dim. la continuità in x_0 .

— o — o —

Oss. A seconda del segno di $f(x) - f(x_0)$ basta fare una delle 2 scelte

$$x_0 - x - x_1 \quad \text{oppure} \quad x_2 - x_0 - x$$

— o — o —

④ Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$ e siano $0 < r_1 < r_0$ t.c.

$\bar{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$. Allora $f(x)$ ha massimo M e minimo m in $\bar{B}_{r_0}(x_0)$ e

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{M - m}{r_0 - r_1} |y - x|$$

(Lip. di $f(x)$ in $\bar{B}_{r_1}(x_0)$)

per ogni x e y in $\bar{B}_{r_1}(x_0)$.

Dim.

Uso il solito lemma con $x - y - x_1$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{|x_1 - y|} \leq \frac{M - m}{r_0 - r_1}$$

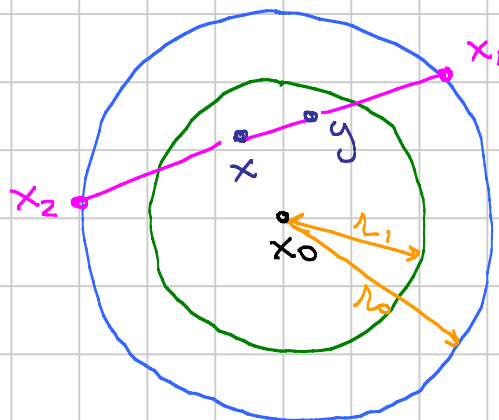
Questo dimostra la tesi se num. del LHS è ≥ 0 .

Uso il solito lemma con $x_2 - x - y$:

$$\frac{m - M}{r_0 - r_1} \leq \frac{f(y) - f(x_2)}{|y - x_2|} \leq \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|}$$

pensarci bene!
Num. potenzialmente negativi!!!!

Conclusione come nel caso di ②



Oss. Dimostriamo per bene che $|x_1 - y| \geq r_0 - r_1$

Dim. $r_0 = |x_1 - x_0| = |(x_1 - y) + (y - x_0)| \leq$ (triangolo)

$$\leq |x_1 - y| + |y - x_0| \leq |x_1 - y| + r_1$$

Porto r_1 al LHS e concludo.

— o — o —

Concavità e derivate seconde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che $f \in C^2(\text{Int}(C))$.

Allora

f è convessa $\Leftrightarrow Hf$ è semidefinita positiva in $\text{Int}(C)$

Dim. Basta dimostrare che le funzioni $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$ sono convesse dove definite.

Essendo le funzioni φ di classe C^2 , sono convesse se e solo se $\varphi''(t) \geq 0$.

Basta dimostrare che

$$\varphi''(t) = \underbrace{\langle Hf(x_0 + tv), \underbrace{v, v}_{\text{vettori}} \rangle}_{\text{matrice}}$$

Questo si può vedere calcolando le derivate con la chain-rule o più brevemente usando Taylor.

Mettiamoci in un pto t_0

$$\varphi(t_0 + R) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)R + \frac{1}{2} \varphi''(t_0)R^2 + o(R^2)$$

$$\underbrace{f\left(\underbrace{x_0 + t_0 v}_{y_0} + \underbrace{Rv}_k\right)}_{\text{matrice}}$$

$$\underbrace{\langle \nabla f(y_0), v \rangle}_{\text{matrice}} R + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) v, v \rangle R^2$$

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + \langle \nabla f(y_0), k \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) k, k \rangle + o(\|k\|^2)$$

— o — o —

La dimostrazione che

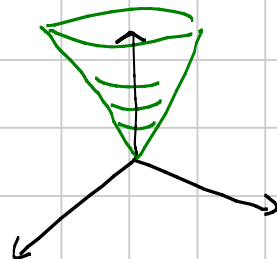
f strett. convessa $\iff$ Hf definito pos. in Int(C)

è esattamente la stessa.

— o — o —

Esempio (non banale) $f(x) = |x|$

Questa è convessa, ma non è nemmeno C^1 .



La convessità si dimostra con la definizione:

dati x e y in $\mathbb{R}^n$ e dati $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$,
devo dim. che

$$|\lambda x + \mu y| \stackrel{?}{\leq} \lambda |x| + \mu |y|$$

Faccio i quadrati (posso perché...)

$$\cancel{\lambda^2 |x|^2} + \cancel{\mu^2 |y|^2} + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \cancel{\lambda^2 |x|^2} + \cancel{\mu^2 |y|^2} + 2\lambda\mu |x| \cdot |y|$$

Quello che resta è Cauchy - Schwarz.

Oss. Sarebbe anche una triangolare, MA ... occhio che...
La triangolare si dimostra così !!!

— o — o —