

Dim. prop. fine ora precedente

(1) $\Rightarrow$ (2) è ovvio perché $\overline{B}_r(x_0)$ è un compatto

(2) $\Rightarrow$ (1) Sia $K \subseteq \text{Int}(D)$ compatto. $\forall x_0 \in K$ esiste $r > 0$ t.c. f è limitata in $\overline{B}_r(x_0)$.

Ma $\{ \overline{B}_r(x_0) : x_0 \in K \}$ è un ricoprimento aperto di K , ^{$\uparrow$ dipende da x_0} quindi esiste un sottoricoprimento finito

$$K \subseteq \overline{B}_{r_1}(x_1) \cup \overline{B}_{r_2}(x_2) \cup \dots \cup \overline{B}_{r_m}(x_m)$$

Siano $M_1, \dots, M_m$ le costanti che limitano $|f(x)|$ in queste palle, allora

$$f(x) \leq \max \{ M_1, \dots, M_m \} \quad \forall x \in K.$$

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

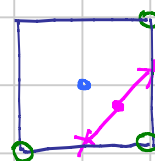
Allora f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$.

(Non sappiamo ancora che è continua)

Dim. Basta dimostrare che f è limitata nei cubetti che contengono un dato p.to.

Detto meglio: $\forall x_0 \in \text{Int}(C)$, f è limitata dall'alto in almeno un cubetto con centro in x_0 .

Questo è vero perché i p.ti estremali sono un numero finito.



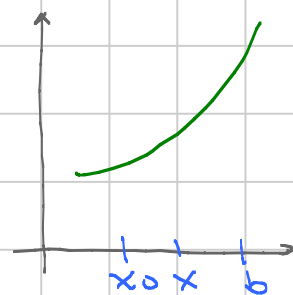
LA PARTE QUI SOTTO È RIFATTA MEGLIO ALLA
LEZIONE 26 $\downarrow$

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.
Allora f è continua in $\text{Int}(C)$

Dim.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| |x - x_0|$$

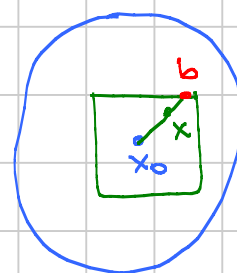
$$\leq \left| \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \right|$$



$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} |x - x_0|$$

$$\leq \frac{f(b) - f(x_0)}{|b - x_0|} |x - x_0|$$

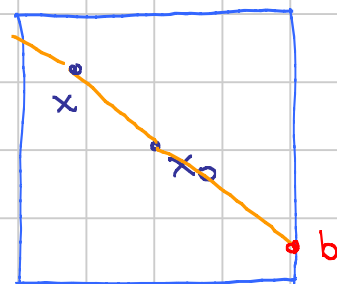
$$\leq \underbrace{\frac{M - f(x_0)}{|b - x_0|}}_{\text{Fisso}} \cdot |x - x_0|$$



A questo punto faccio tendere $x \rightarrow x_0$ però mi serve il valore assoluto, cioè vorrei

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{|b - x_0|} |x - x_0|$$

Prendo il b dalla parte in cui si realizza il massimo sul segmento, e a quel p.to il numeratore è positivo.

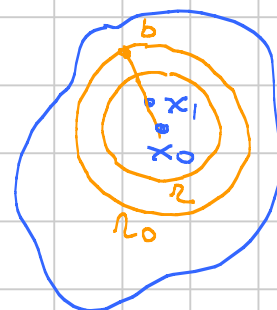


— o — o —

Teorema $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa $\Rightarrow$ localmente lipschitziana

Dim. Prendo due raggi $0 < r < r_0$ t.c.

$$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$$



Ora sappiamo che in $\bar{B}_{r_0}(x_0)$ $f(x)$ ammette massimo M e minimo m , per la continuità appena "dimostrata". Allora per ogni x_0 e x_1 in $B_r(x_0)$ avremo che

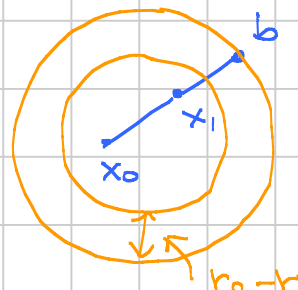
$$|f(x_1) - f(x_0)| = \frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{|x_1 - x_0|} |x_1 - x_0|$$

$$\leq \frac{|f(b) - f(x_0)|}{|b - x_0|} |x_1 - x_0|$$

$$\leq \boxed{\frac{M - m}{r_0 - r}} |x_1 - x_0|$$

"

— 0 — 0 —



FINE PARTE RIFATTA
(MEGLIO?) ALLA LEZ. 26

Monotonia del gradiente

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione.

Si dice che g è monotona se

$$\langle g(y) - g(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

↑

se $>$ quando $x \neq y$ allora è
strettamente monotona

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Allora

$$f \text{ è convessa} \iff \nabla f(x) \text{ è monotono}$$

Dav. $\Rightarrow$ Devo dimostrare che

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x_0 \in C, \forall x_1 \in C$$

Considero $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$

Allora φ è convessa e derivabile, quindi $\varphi'(1) \geq \varphi'(0)$

Ma $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + t(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle$ per chain rule

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi''(0)} \leq \underbrace{\langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi''(1)}$$

Porto al RHS e ho la tesi.

⇐ Basta dimostrare che tutte le $\varphi(t)$ come sopra sono convesse in $[0, 1]$. Essendo φ derivabile basta far vedere che $\varphi'(t)$ è debolmente crescente, cioè

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_2(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_2)} \geq \underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_1)}$$

per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Se porto tutto a sx ho

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_2(x_1 - x_0)) - \nabla f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{a} \geq 0$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_b \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{(t_1 - t_2)(b-a)}$

e quindi segue dalla monotonia del gradiente.

In una variabile le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti (se esistono).

A livello di $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$$

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0)$$

"

"

$$f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\text{equazione del piano tangente nel pto } x_0}$$

$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Le funzioni convesse stanno sopra il piano tangente.