

FUNZIONI CONVESSE DI PIÙ VARIABILI

Def Sia V uno sp. vettoriale. Un sottoinsieme $C \subseteq V$ si dice **CONVESSO** se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

segmento di estremi x e y

Def. Sia $C \subseteq V$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

La funzione f si dice **convessa** se

$$\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

La funzione f si dice **strettamente convessa** se vale $<$ quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Lemma Se $C \subseteq V$ è convesso, $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$$

comb. convessa di $x_1, \dots, x_n$

Dim. Induzione su n . $n=2$ è la def.

$n-1 \Rightarrow n$ wlog $\lambda_n \neq 1$. Allora

comb. conv. di $x_1, \dots, x_{n-1} \Rightarrow \in C$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_n} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{1 - \lambda_n} x_{n-1} \right) (1 - \lambda_n) + \lambda_n x_n.$$

Teorema (Jensen negli sp. vettoriali) Sia $C \subseteq V$ convesso, sia $m \geq 2$, sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, siano $(x_1, \dots, x_m) \in C^m$, siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in [0, 1]^m$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.
Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_m f(x_m)$$

Dim. Come ad analisi 1, a partire dalla riga precedente. $\square$

Teoria base delle funzioni convesse di 1 variabile

Convessità vs continuità

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è loc. lip. in $\text{Int}(C)$

Convessità vs derivata prima Supponiamo f derivabile in $\text{Int}(C)$
Allora

f convessa $\Leftrightarrow f'(x)$ deb. cresc. in $\text{Int}(C)$
 f strett. conv. $\Leftrightarrow f'(x)$ strett. cresc. in $\text{Int}(C)$

Convessità vs derivata seconda Supponiamo $f''(x)$ esiste in $\text{Int}(C)$
Allora

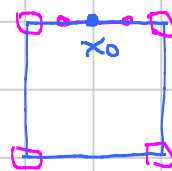
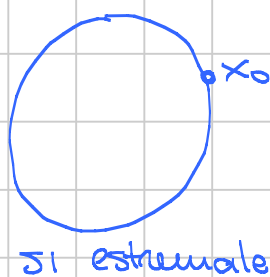
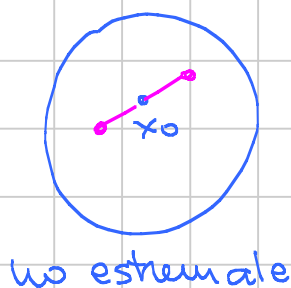
f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{Int}(C)$
 f strett. conv. $\Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Int}(C)$

l'altra è falsa, solo $\geq$

Moralmente il quadro è analogo in $\mathbb{R}^n$

Def. Sia $C \subseteq V$ un insieme convesso. Un punto $x_0 \in C$ si dice punto estrema se non sta nell'interno di nessun segmento con estremi in C
non sul bordo.

Esempi



- I punti estremali sono per forza su ∂C
- I pti estremali di $B_r(x_0)$ sono il bordo
- I pti estremali di un poligono sono solo i vertici.

Proposizione Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e compatto, e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e convessa, allora il max (che esiste per W.) è assunto almeno in un pto estremoale.
(Almeno uno dei pti di max è estremoale)

Dim. In una variabile una funzione convessa assume il max agli estremi di un intervallo.
Ripetendo il ragionamento sui segmenti che contengono x_0 segue la tesi. $\square$

— o — o —

Fatto: La convessità, anche in $\mathbb{R}^n$, è una faccenda unidimensionale, cioè $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se sono convesse le sue restrizioni alle rette.

Detto meglio, i seguenti fatti sono equivalenti:

- (1) f è convessa in C
- (2) $\forall x_0 \in C, \forall v \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$ è convessa per i valori di t per cui è definita
- (3) $\forall x_0 \in C, \forall x_1 \in C$, la funzione
$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$$
è convessa in $[0, 1]$.

Dim. (1) $\Rightarrow$ (3) Devo dimostrare che

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

Ora $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \varphi(\underbrace{x_0}_{\text{S}} + \underbrace{\lambda t_1 (x_1 - x_0)}_{\text{S}} + \underbrace{(1-\lambda)t_2 (x_1 - x_0)}_{\text{S}})$

$$\varphi(t_1) = \varphi(\underbrace{x_0 + t_1 (x_1 - x_0)}_P)$$

$$\varphi(t_2) = \varphi(\underbrace{x_0 + t_2 (x_1 - x_0)}_Q)$$

$$\lambda P + (1-\lambda)Q = \underbrace{\lambda x_0}_{\text{S}} + \underbrace{\lambda t_1 (x_1 - x_0)}_{\text{S}} + \underbrace{(1-\lambda)x_0}_{\text{S}} + \underbrace{(1-\lambda)t_2 (x_1 - x_0)}_{\text{S}}$$

$$\varphi(S) \leq \lambda \varphi(P) + (1-\lambda)\varphi(Q)$$

(3) $\Rightarrow$ (1) La tesi è che φ è convessa quindi

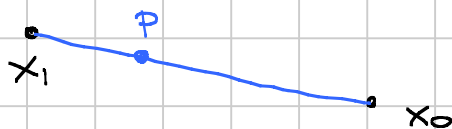
$$\varphi(\underbrace{\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1}_{\varphi''(1-\lambda)}) \leq \lambda \underbrace{\varphi(x_0)}_{\varphi''(0)} + (1-\lambda) \underbrace{\varphi(x_1)}_{\varphi''(1)}$$

So per ipotesi che $\varphi(t) = \varphi(x_0 + t(x_1 - x_0))$ è convessa

Spero che LHS sia $\varphi(\lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 1) = \varphi(1-\lambda)$

$$\varphi(1-\lambda) = \varphi(x_0 + (1-\lambda)(x_1 - x_0)) = \varphi(\cancel{x_0} + x_1 - \cancel{x_0} - \lambda x_1 + \lambda x_0) = \varphi(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1).$$

— 0 — 0 —



$$\varphi(P) \leq \lambda \varphi(x_0) + (1-\lambda)\varphi(x_1)$$

$$\lambda = \frac{|x_1 - P|}{|x_1 - x_0|}$$

— 0 — 0 —

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che f è localmente limitata in D se solo se

$$\forall K \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \text{ t.c. } |f(x)| \leq M \quad \forall x \in K$$

$\uparrow$
compatto

Prop. Nelle ipotesi di sopra, sono fatti equivalenti

(1) $\forall K \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq M$

(2) $\forall x_0 \in \text{Int}(D) \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } \overline{B}_r(x_0) \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R}$
 $\forall x \in \overline{B}_r(x_0) \quad |f(x)| \leq M.$

