

Esercizio (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

Dimostrare che ogni polinomio a coeff. complessi ammette almeno una radice complessa

Dim. Road map $\rightarrow$ formularlo in termini di max/min
 $\rightarrow$ fare vedere che il min esiste
 $\rightarrow$ fare vedere che solo 0 può essere min.

$$p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$$

lo trasformo in una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = |p(x + iy)|$$

$\uparrow$ modulo del numero complesso

A questo punto tesi $\Leftrightarrow \min \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = 0$

Detto (x_0, y_0) un pto di min. si avrà che

$$f(\underbrace{x_0 + iy_0}_{z_0}) = 0$$

Passo 1 Dimostriamo che il minimo esiste (w. generalizzato)

Intanto $f(x, y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$.

Mostriamo che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Torniamo al polinomio, che wlog possiamo pensare monico

$$|p(z)| = |z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0|$$

$$|p(z)| = \underbrace{|z|^n}_{|z|^n} \cdot \underbrace{\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}_{\geq 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n}}$$

Ho usato una proprietà dei moduli, cioè la disuguaglianza triangolare

$$|p(z)| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)$$

Quando $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$, anche $|z| \rightarrow +\infty$ (occhio: $|z| = \rho$)

quindi $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty$

Per w. generalizzato il min. esiste.

Passo 2 Dimostriamo che il minimo è 0. Se per assurdo non fosse 0, facciamo vedere con uno STUDIO LOCALE che si può scendere.

Wlog possiamo assumere che un pto di minimo sia $(0,0)$ ($z_0=0$) (se così non fosse considero il nuovo polinomio $p(z-z_0)$)

$$p(z) = \underbrace{b_0}_{\neq 0} + \underbrace{b_k z^k}_{\text{primo coeff successivo ad essere } \neq 0} + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_n z^n$$

$w \in \mathbb{C}$

Ora considero i valori di z del tipo $t w$ con t piccolo reale

$$p(tw) = b_0 + b_k t^k w^k + o(t^k)$$

Scelgo $w \in \mathbb{C}$ in maniera tale che $b_k w^k = -b_0$, cioè

$w^k = -\frac{b_0}{b_k}$ (ho diviso per $b_k \neq 0$ e basta saper fare le radici k -esime, per le quali c'è una teoria elementare)

Detto w_0 questo w appena scelto, abbiamo

$$p(tw_0) = b_0 - b_0 t^k + o(t^k) = (1-t^k)b_0 + o(t^k)$$

e quindi

$$|p(tw_0)| = |(1-t^k)b_0 + o(t^k)| \stackrel{\text{triangolo}}{\leq} (1-t^k)|b_0| + |o(t^k)| < |b_0| \text{ per } t \text{ piccolo}$$

$$(1-t^k)|b_0| + |o(t^k)| = |b_0| - t^k|b_0| + o(t^k) < |b_0|$$

per studio locale.

— o — o —

Oss. Abbiamo dimostrato un risultato più forte: dato $p \in \mathbb{C}[z]$ se $z_0 \in \mathbb{C}$ non è una radice, allora c'è una direzione che esce da z_0 nella quale $|p(z)|$ decresce.

Quindi le radici di $p(z)$ sono tutti e soli i p.ti di min. loc. per la funzione $|p(z)|$.

— o — o —

Esercizio Calcolare $\inf/\sup/\max/\min$ di $\underline{x^2+y^2+z^2}$ sull'insieme $\neq (x,y,z)$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 3\}$$

Capiamo come è fatto D :

→ è chiuso perché è intersezione di 4 chiusi

→ non è limitato perché $(1, n, \frac{3}{n}) \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la norma $\rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow$ addio W.

Però abbiamo già dim. che $\sup = +\infty$. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\underbrace{1, t, \frac{3}{t}}_{\in D}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + t^2 + \frac{3}{t^2} = +\infty$$

Ora $\lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y,z) \in D}} f(x,y,z) = +\infty$ perché lo è anche senza la condizione $(x,y,z) \in D$

W generalizzato $\Rightarrow$ esiste il minimo, che posso calcolare con i moltiplicatori o la parametrizzazione

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2x = \lambda yz & \bullet x \\ 2y = \lambda xz & \bullet y \\ 2z = \lambda xy & \bullet z \\ xyz = 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} 2x^2 = \lambda xyz = 3\lambda \\ 2y^2 = & = 3\lambda \\ 2z^2 = & = 3\lambda \end{array}$$

Quindi $x=y=z = \sqrt[3]{3}$ e questo è l'unico p.to di minimo.

Con la parametrizz. mi ritrovo $z = \frac{3}{xy}$ e mi riduco

$$a \quad \min \left\{ x^2 + y^2 + \frac{9}{xy^2} : \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{\text{vincolo non compatto}} \right\}$$

— 0 — 0 —